

長らくここにありました

極座標・回転群・ $SL(2, \mathbb{R})$

と題する講義ノートは、このたび大幅に加筆・修正をして、日本評論社から

球面調和関数と群の表現

というタイトルで、2018年7月25日に出版されました。  
次ページ以降に、その本の目次を載せておきます。

学部3年生後半からでも読めるように、予備知識となる事柄も充実させる一方で、予備知識をすでにお持ちの方のために、他書にはあまり見られない演習問題も採録して、解答も書いておきました。主題の球面調和関数とともに、楽しんでいただけたと思います。

# 目次

まえがき	<i>i</i>
断りなしに用いる記号	<i>ix</i>
<b>第 1 章 ベクトル空間</b>	<b>1</b>
1.1 定義	1
1.2 次元・基底	5
1.3 内積	6
1.4 線型作用素	9
<b>第 2 章 距離空間と位相空間</b>	<b>11</b>
2.1 距離空間	11
2.2 位相空間	15
2.3 連続写像	20
2.4 コンパクト集合	22
2.5 完備距離空間	28
2.6 連結集合	30
<b>第 3 章 ノルム空間と有界線型作用素</b>	<b>34</b>
3.1 ノルム空間	34
3.2 有界線型作用素	38
3.3 $L^p$ の双対空間	43
<b>第 4 章 Hilbert 空間</b>	<b>45</b>
4.1 直交分解と Riesz の定理	45
4.2 正規直交系と正規直交基底	48

4.3 共役作用素 .....	51
4.4 直交射影 .....	54
4.5 ユニタリ作用素と Hilbert 空間の同型 .....	56
4.6 1 変数 Hermite 函数系 .....	58
4.7 Fock 空間 .....	62
<b>第 5 章 群</b> .....	<b>66</b>
5.1 基本事項 .....	66
5.2 群の作用 .....	71
5.3 対称群 .....	73
5.4 線型 Lie 群 .....	79
5.5 直交群・回転群 .....	82
<b>第 6 章 Laplacian と調和多項式</b> .....	<b>86</b>
6.1 $\mathbb{R}^n$ の極座標 .....	86
6.2 Laplacian の極座標表示 .....	89
6.3 斉次多項式 .....	91
6.4 Laplacian の特徴付けと回転不変な多項式 .....	96
6.5 調和多項式の空間 .....	100
<b>第 7 章 球面調和函数</b> .....	<b>108</b>
7.1 球面調和函数の空間 .....	108
7.2 球面調和函数の完全性 .....	109
7.3 球面帯調和函数 .....	110
7.4 球面帯調和函数の母函数 .....	120
7.5 Hermite–Weber 変換と Laguerre 函数 .....	123
<b>第 8 章 超球多項式の性質</b> .....	<b>129</b>
8.1 積分公式 .....	129
8.2 超球多項式の完全性 .....	132
8.3 超球多項式の積分表示 .....	133

<b>第 9 章 位相群とその表現 (速習)</b>	<b>135</b>
9.1 局所コンパクト群	135
9.2 閉部分群による商空間	139
9.3 Haar 測度	142
9.4 商空間上の測度	146
9.5 局所コンパクト群の表現	150
9.6 局所コンパクト群におけるたたみ込みと Gelfand 対	158
<b>第 10 章 球面調和函数と回転群の表現</b>	<b>166</b>
10.1 回転群の表現	166
10.2 既約性の応用	170
10.3 Gelfand 対 ( $SO(n, \mathbb{R})$ , $SO(n-1, \mathbb{R})$ )	171
10.4 球面上の標準測度の Fourier 変換と Bochner 等式	175
<b>第 11 章 Lie 代数</b>	<b>178</b>
11.1 行列変数の指数函数と対数函数	178
11.2 Lie 代数	184
11.3 指数写像	187
11.4 Lie 代数の表現	190
<b>第 12 章 ユニタリ作用素のなす群</b>	<b>195</b>
12.1 Stone の定理	195
12.2 線型 Lie 群のユニタリ表現の微分表現	203
<b>第 13 章 <math>SL(2, \mathbb{R})</math></b>	<b>207</b>
13.1 基本構造	207
13.2 $SL(2, \mathbb{R})$ の作用	209
13.3 $SL(2, \mathbb{R})$ の普遍被覆群 $SL(2, \mathbb{R})^\sim$	211
13.4 重み付き Bergman 空間	216
13.5 重み付き Bergman 空間への $SL(2, \mathbb{R})^\sim$ のユニタリ表現	220
<b>第 14 章 <math>L^2(\mathbb{R}^n)</math> の既約分解</b>	<b>227</b>
14.1 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の元によるユニタリ作用素の 1 パラメータ群	227

14.2	Paley–Wiener 型の定理	231
14.3	ユニタリ作用素の 1 パラメータ群から $SL(2, \mathbb{R})$ の表現へ	235
14.4	簡約双対ペア	238
14.4.1	双対ペアとしての $(SL(2, \mathbb{R}), O(n, \mathbb{R}))$	238
14.4.2	斜交ベクトル空間と Lagrangian 部分空間	240
14.4.3	Heisenberg 群とメタプレクティック表現	243
<b>附章 A</b>	<b>測度論・積分論における基本事項</b>	<b>250</b>
A.1	$\sigma$ 加法族	250
A.2	測度	251
A.3	可測関数	252
A.4	積分	253
<b>附章 B</b>	<b>局所コンパクト空間上の測度</b>	<b>257</b>
B.1	局所コンパクト空間	257
B.2	正則 Borel 測度	259
<b>附章 C</b>	<b>Baire 空間</b>	<b>265</b>
C.1	導入	265
C.2	Baire 空間としての局所コンパクト空間	267
<b>附章 D</b>	<b>Stone–Weierstrass の定理</b>	<b>268</b>
D.1	Bernstein 多項式	268
D.2	$C(K)$ の代数構造	270
D.3	Stone–Weierstrass の定理	272
<b>附章 E</b>	<b>Fourier 変換</b>	<b>273</b>
E.1	たたみ込み	273
E.2	$L^1$ 代数の表現としての Fourier 変換	277
<b>附章 F</b>	<b>Schwartz 空間と緩増加超関数</b>	<b>280</b>
F.1	Fréchet 空間	280
F.2	Schwartz 空間	280
F.3	緩増加超関数	283

<b>附章 G Hilbert 空間のテンソル積</b>	<b>286</b>
G.1 ベクトル空間の代数的テンソル積 .....	286
G.2 Hilbert 空間のテンソル積 .....	288
G.3 $L^2$ 空間のテンソル積 .....	289
G.4 線型作用素のテンソル積 .....	291
<b>附章 H 被覆群</b>	<b>293</b>
H.1 単連結性 .....	293
H.2 被覆空間 .....	293
H.3 被覆群 .....	294
<b>問題の解答・解説</b>	<b>295</b>
<b>あとがき</b>	<b>336</b>
<b>参考文献</b>	<b>338</b>
<b>索引</b>	<b>349</b>