UNIVERSITE DE NANCY I
FACULTE DES SCIENCES

DIPLOME: Maîtrise de Mathématiques Epreuve de: ANALYSE HARMONIQUE Session de: Juin 1991 Date: 05.06.1991 Horaire: 9H à 12H	SUJET D'EXAMEN: Durée du sujet: 3 heures Nom du rédacteur: T. NOMURA Documents non autorisés

NOTATIONS:

— Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on désignera par $\|x\|$ la norme euclidienne de x: $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

— S^{n-1} = la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

— $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ = l'espace vectoriel des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ à support compact.

— $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ = l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$.

— On notera σ la mesure borélienne sur S^{n-1} telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty r^{n-1}\, dr \int_{S^{n-1}} f(ru)\, d\sigma(u)$$

pour toute fonction borélienne intégrable f sur $\mathbb{R}^n$.

[1] Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Supposons que f vérifie $f(rx) = r^{-n} f(x)$ quels que soient $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Si $\displaystyle\int_{S^{n-1}} f(u)\, d\sigma(u) = 0$, alors montrer que la limite $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\|x\| \geq \varepsilon} f(x)\varphi(x)\, dx$ existe pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et qu'elle définit une distribution, notée par $\mathrm{vp}\, f$, homogène de degré $-n$.

[2] Soit $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}) := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ ;\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 0 \right\}$.

(1) Montrer que $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ si et seulement si φ est dérivée d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(2) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $\dfrac{dT}{dx} = 0$.

(a) Montrer que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que T est une distribution associée à une fonction constante (on dira que T est constante).

[3] On se propose de déterminer toutes les distributions homogènes de degré -1 sur $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que la mesure δ de Dirac au point $x = 0$ et la distribution $\mathrm{vp}\, \dfrac{1}{x}$ sont homogènes de degré -1. Montrer d'ailleurs qu'elles sont linéairement indépendentes.

(2) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution homegène de degré -1. Donc on a $x\, \dfrac{dT}{dx} = -T$ (on l'utilisera sans démonstration). Montrer que la distribution xT esr constante.

(3) Soit c_1 la constante telle que $xT = c_1$. Considérons la distribution S définie par $S := T - c_1 \cdot \mathrm{vp}\, \dfrac{1}{x}$. Montrer que $xS = 0$.

(4) Déduire du (3) qu'il existe une constante c_2 telle que $S = c_2 \cdot \delta$. On notera que si $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une fonction telle que $\theta(0) = 1$, alors pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)}{x}$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Ainsi, l'espace vectoriel des distributions homogènes de degré -1 sur $\mathbb{R}$ est de dimension 2, et δ, $\mathrm{vp}\, \dfrac{1}{x}$ en forment une base.

(A SUIVRE)

[**4**] Soient $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{P}_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) le sous-espace de $\mathcal{P}$ formé par les polynômes homogènes de degré j. On définit une transformation W sur $\mathcal{P}$ par

$$WP(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|^2/2} P(x + iy)\, dy \qquad (P \in \mathcal{P}).$$

(1) Montrer que, si $P \in \mathcal{P}_j$, alors $WP - P \in \bigoplus_{t=1}^{l} \mathcal{P}_{j-2t}$, où $l = [j/2]$.

(2) Montrer que $W(x_k P)(x) = x_k WP(x) - \dfrac{\partial}{\partial x_k} WP(x)$ pour $P \in \mathcal{P}$ et $k = 1, 2, \dots, n$.

(3) Montrer que $WP(x) = e^{\|x\|^2/2} P(-D)\, e^{-\|x\|^2/2}$ pour $P \in \mathcal{P}$, où $P(D)$ signifie l'opérateur différentiel associé au polynôme $P(x)$.

FIN