Université de NANCY 1
Maîtrise de Mathématiques

Examen partiel

Analyse Harmonique (T. Nomura)

le 3 Avril 1991, 9H00 $\sim$ 12H00

Documents non autorisés

NOTATIONS: — n est un entier ≥ 3.

— Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on désignera par $\|x\|$ la norme euclidienne de x: $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

— Multi-indice: pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, où chaque α_j est un entier non-négatif, on note:

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$
$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \text{pour } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$
$$D^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

— On notera par $\mathcal{P}_j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots$) l'espace vectoriel complexe formé par les fonctions polynomiales homogènes de degré j (à coefficients complexes) sur $\mathbb{R}^n$.

— Le produit scalaire de Fischer:

$$(p \,|\, q)_{\mathrm{F}} := p(D)\overline{q} \qquad \text{pour } p, q \in \mathcal{P}_j,$$

où si $p(x) = \sum_{|\alpha|=j} c_\alpha x^\alpha$ ($c_\alpha \in \mathbb{C}$), $p(D)$ signifie l'opérateur différentiel défini par $p(D) = \sum_{|\alpha|=j} c_\alpha D^\alpha$.

— $\mathcal{PH}_j$ désignera le sous-espace de $\mathcal{P}_j$ formé par les polynômes harmoniques.

[1] Montrer la décomposition orthogonale suivante par rapport au produit scalaire de Fischer $(\cdot\,|\,\cdot)_{\mathrm{F}}$:

$$\mathcal{P}_j = \mathcal{PH}_j \oplus \|x\|^2\,\mathcal{P}_{j-2} \qquad (j \geq 2).$$

[2] Posons

$q_{c,j}(x) := (c_1x_1 + \cdots + c_nx_n)^j$ pour $c = (c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ et j entier ≥ 0.

Soit $\mathcal{N} := \{(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n \ ; \ c_1^2 + \cdots + c_n^2 = 0\}$.

(1) Montrer que si $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathcal{N}$, alors on a

$$\left(c_1\,\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + c_n\,\frac{\partial}{\partial x_n}\right) q_{c,m} = 0 \quad \text{quel que soit } m = 0, 1, 2, \ldots.$$

(2) En utilisant le théorème de l'irréductibilité de la représentation de $SO(n, \mathbb{R})$ sur $\mathcal{PH}_j$ (dont la démonstration n'est pas exigée ici), montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{PH}_j$ est engendré par les $q_{c,j}$ $(c \in \mathcal{N})$.

(3) Montrer l'identité suivante:

$$p(D)(\|x\|^{2-n}) = d_j\,\|x\|^{2-n-2j}\,p(x) \qquad (p \in \mathcal{PH}_j),$$

où $d_j = (-1)^j\,(n-2)\,n\,(n+2)\cdots(n+2j-4)$. On pourra d'abord supposer que $p = q_{c,j}$.

(4) Soit $q \in \mathcal{P}_j$ $(j \geq 2)$ et écrivons $q = p + \|x\|^2\,r$ avec $p \in \mathcal{PH}_j,\ \ r \in \mathcal{P}_{j-2}$, suivant la décomposition du [1]. Alors, montrer que

(a) la fonction $\|x\|^{2-n}$ est harmonique sauf pour $x = 0$,

(b) $q(D)(\|x\|^{2-n}) = p(D)(\|x\|^{2-n})$.

[3] (1) Soit $f \in \mathcal{P}_j$. Montrer que l'on a

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\,\frac{\partial f}{\partial x_k} = jf.$$

(2) Soit $h \in \mathcal{PH}_j$. Montrer que, pout tout $k = 1, \ldots, n$, la fonction

$$x \mapsto x_k\,h(x) - \frac{1}{n+2j-2}\,\|x\|^2\,\frac{\partial h}{\partial x_k}(x)$$

appartient à $\mathcal{PH}_{j+1}$.

(A SUIVRE)

[4] Montrer directement que l'équation différentielle suivante possède une et une seule solution polynomiale $y = y(t)$ de degré j telle que $y(1) = 1$:

$$(1 - t^2)y'' - (n - 1)ty' + j(n + j - 2)y = 0.$$

$\left(\text{Poser } y = \sum_{k=0}^{j} a_k t^k.\right)$

$\overline{\underline{\text{FIN}}}$