コマ切れ

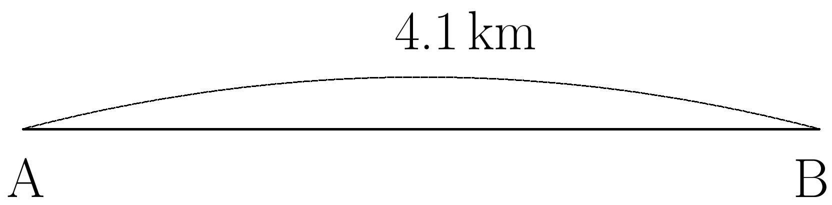
微積分　課外授業

野村隆昭

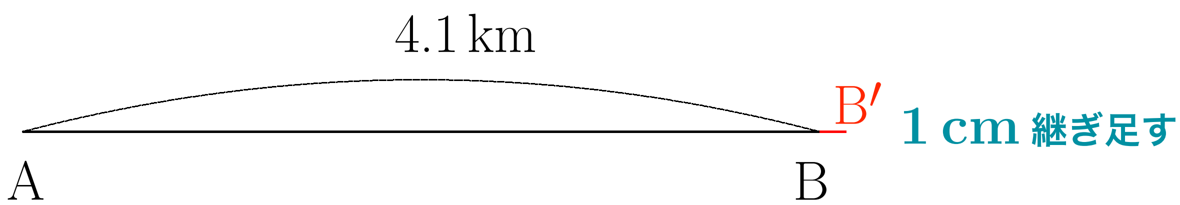
2012年**5**月**19**日（土）

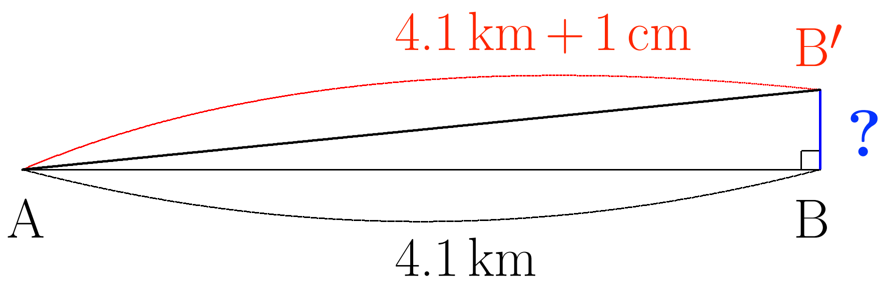
於：一年生九重研修

クイズ

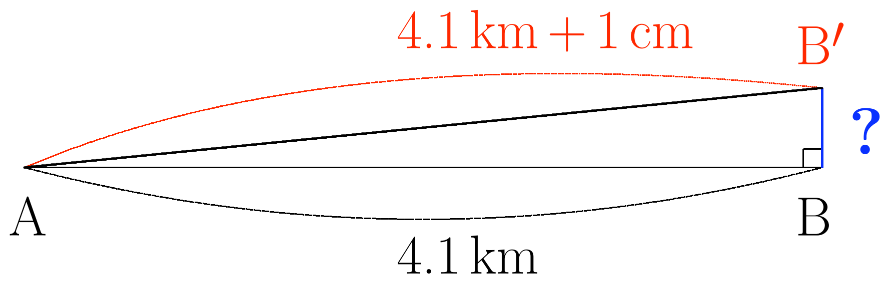


（数理棟から九大学研都市駅までの大体の直線距離）





- 計算しないで，直感で答えてください：



(1) 計測出来ないくらいわずか

(2) $1\,\mathrm{mm}$ 位

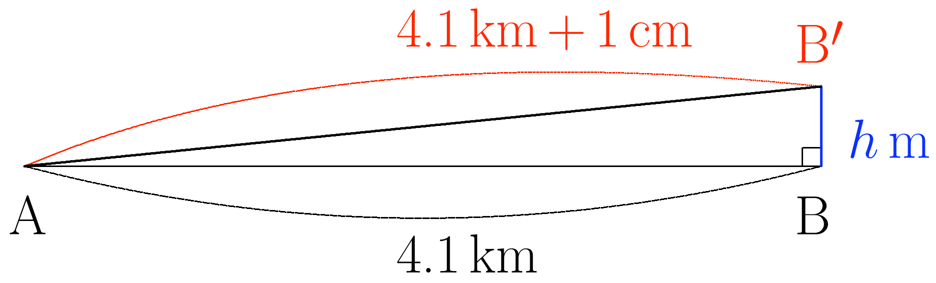
(3) $9\,\mathrm{mm}$ 位

(4) $9\,\mathrm{cm}$ 位

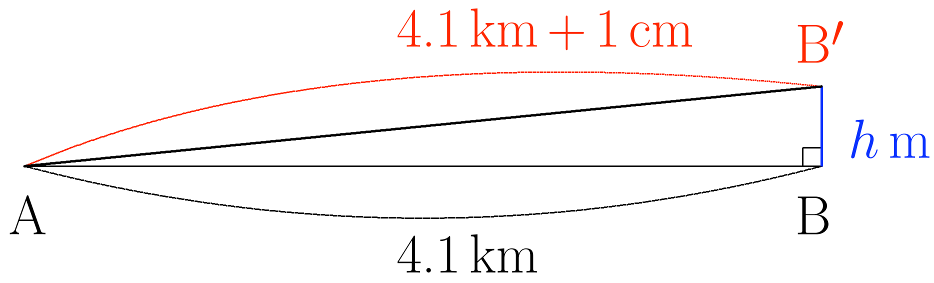
(5) $90\,\mathrm{cm}$ 位

(6) $9\,\mathrm{m}$ 位

(7) $10\,\mathrm{m}$ を越える



$4.1\,\mathrm{km} + 1\,\mathrm{cm} = (4100 + 0.01)\,\mathrm{m}$ であるから，三平方の定理より



$4.1\,\mathrm{km} + 1\,\mathrm{cm} = (4100 + 0.01)\,\mathrm{m}$ であるから，三平方の定理より

$$
\begin{aligned}
h^2 &= (4100 + 0.01)^2 - 4100^2 \\
&= 2 \times 4100 \times 0.01 + 0.01^2 \\
&= 82 + 0.01^2 \fallingdotseq 82
\end{aligned}
$$

で $h \fallingdotseq 9$ となり，正解は，**(6)** $9\,\mathrm{m}$ 位 — でした.

函数 $f(x) = x^2$ を考える． $x_0 = 4100$ とする．
$\Delta x = 0.01$ とすると， Δx は小さいけれど，
$f(x_0)$ と $f(x_0 + \Delta x)$ の差はそれほど小さくない．
実際，先の計算より

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 82.01$$

$(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$ であり， $2x_0\Delta x$ あるので，
Δx が小さくても， x_0 が大きかったら，
$(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$ は小さくない．

- $f(x)$ が $x = x_0$ で連続 $\overset{\textbf{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$
- 先の例で言っていること：

$f(x)$ が $x = x_0$ で連続であるときは，
$f(x_0+\Delta x) \to f(x_0)$ $(\Delta x \to 0)$ であるが，$|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)| < \varepsilon$ となるように選ぶ Δx の小ささは，x_0 の位置に依存している．

- $f(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ で一様連続ではない．

微積で精密な議論をするとき，連続になるという，そのなり方を区別しなければならないことが多い．

$\leadsto$ ε-δ 論法でないとそれを議論できない．

- $f(x)$ が $x = x_0$ で連続 $\overset{\textbf{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$

- x_0 の変域（函数 $f(x) := x^2$ の定義域）を有限な閉区間 $[a, b]$ に制限してみよう．そうすると

$$(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2$$

において，右辺における $|x_0|$ の大きくなれる範囲が限られる．

（高々 $M := \max\{|a|, |b|\}$ である．）

与えられた $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta := \min\{(2M+1)\varepsilon, 1\}$ とおくと，（x_0 の位置に関係なく）$|\Delta x| < \delta$ をみたしさえすれば，

$$|(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2| \leqq 2|x_0||\Delta x| + |\Delta x| = (2|x_0| + 1)|\Delta x| < (2M+1)\delta < \varepsilon.$$

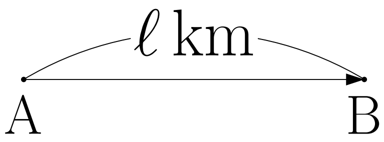
- 有限な閉区間で連続な函数は一様連続である．

クイズ 2

$\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$　　行き：平均時速 **60 km**

$\mathrm{A} \longleftarrow \mathrm{B}$　　帰り：平均時速 **40 km**（一部渋滞に巻き込まれた）

$\boxed{\text{問題}}$　行き帰りをまとめると，平均時速は **50 km** ？



行き：平均時速 $\mathbf{60\,km}$

所要時間は $\dfrac{\ell}{60}$ 時間

帰り：平均時速 $\mathbf{40\,km}$

所要時間は $\dfrac{\ell}{40}$ 時間

行き帰りをまとめると，$2\ell\,\mathrm{km}$ の距離に $\dfrac{\ell}{60}+\dfrac{\ell}{40}$ 時間かかった

ゆえに平均時速は $\quad \dfrac{2\ell}{\dfrac{\ell}{60}+\dfrac{\ell}{40}} = \dfrac{2}{\dfrac{5}{120}} = \mathbf{48}\,(\mathrm{km/h})$

平均速度の平均は，相加平均ではなくて，調和平均

クイズ 3

共に **40** 名の二つのクラス **A, B** で試験を行ったところ：

- クラス **A**（**40** 人）：男子生徒の平均点 $>$ 女子生徒の平均点
- クラス **B**（**40** 人）：男子生徒の平均点 $>$ 女子生徒の平均点

$\boxed{\text{問題}}$ **A, B** 両方のクラスを合わせて平均をとっても
『男子生徒の平均点 $>$ 女子生徒の平均点』 と結論できるか ？

分析

クラスA：　男 m_A人，女 f_A人　　$m_A + f_A = 40$

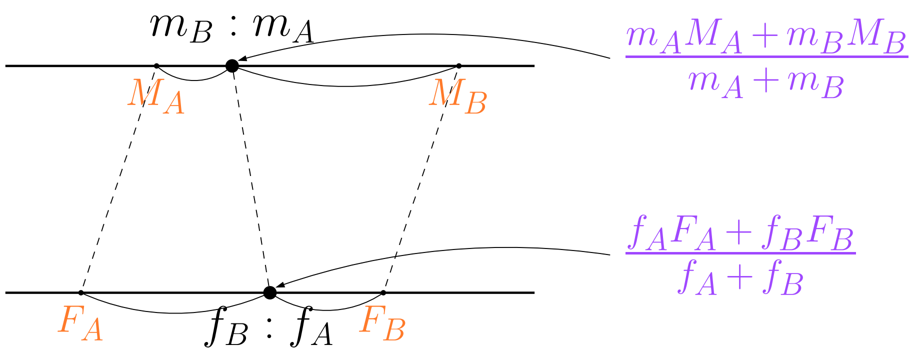
平均点：男 M_A点，女 F_A点　　$M_A > F_A$

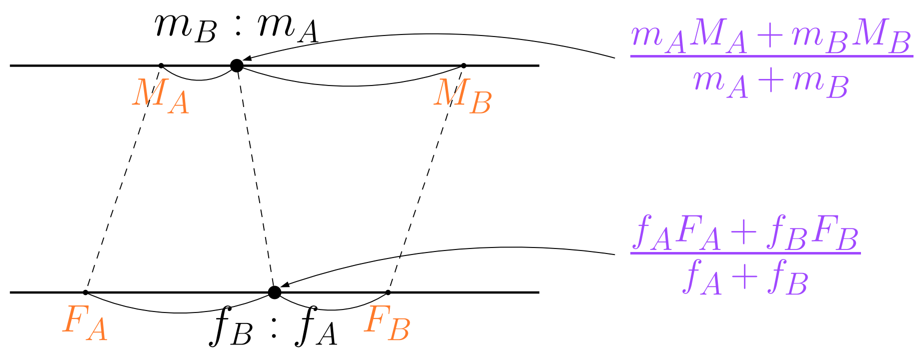
クラスB：　男 m_B人，女 f_B人　　$m_B + f_B = 40$

平均点：男 M_B点，女 F_B点　　$M_B > F_B$

男全体の平均：$\dfrac{m_A M_A + m_B M_B}{m_A + m_B}$　　女全体の平均：$\dfrac{f_A F_A + f_B F_B}{f_A + f_B}$

$M_A < M_B$ と仮定して分析を続けよう：

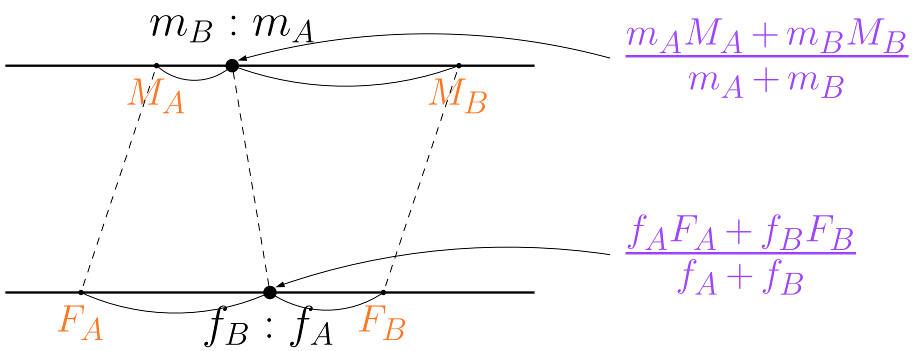




m_Bが小さく（f_Bが大きく）て

m_Aが大きい（f_Aが小さい）と

反例が作れそうだ



m_Bが小さく（f_Bが大きく）て

m_Aが大きい（f_Aが小さい）と

反例が作れそうだ

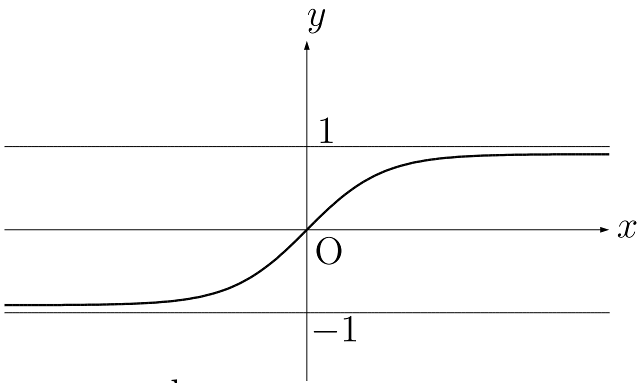
	A		B		計	
	人数	平均	人数	平均	人数	平均
男	**30**	**41**	**10**	**61**	**40**	**46**
女	**10**	**40**	**30**	**60**	**40**	**55**

$$\frac{41 \cdot 3\cancel{0} + 61 \cdot 1\cancel{0}}{4\cancel{0}} = \frac{123 + 61}{4} = \mathbf{46}$$

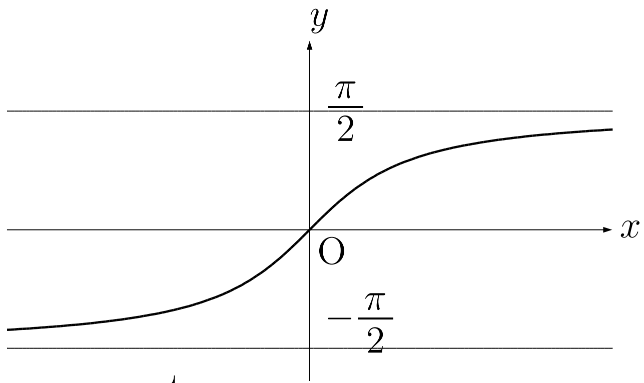
$$\frac{40 \cdot 1\cancel{0} + 60 \cdot 3\cancel{0}}{4\cancel{0}} = \frac{40 + 180}{4} = \mathbf{55}$$

$\tanh x$ と $\arctan x$

$\tanh x$ と $\arctan x$

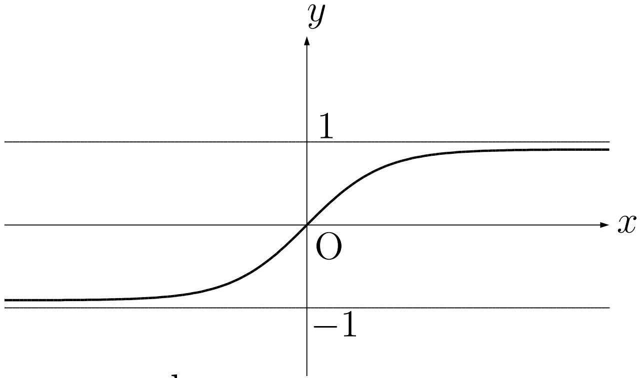


$y = \tanh x$

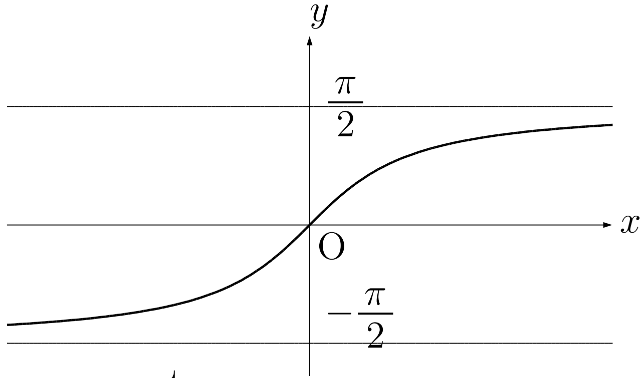


$y = \arctan x$

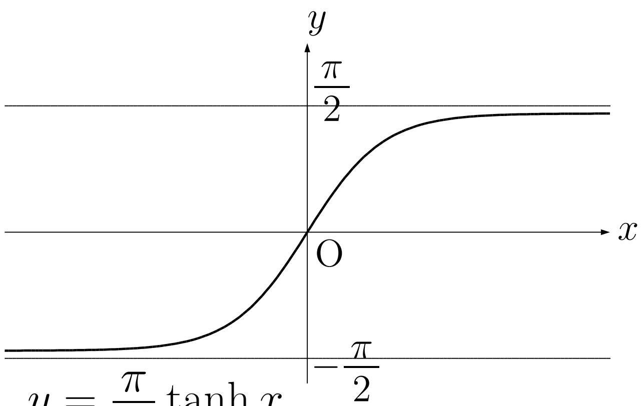
$\tanh x$ と $\arctan x$



$y = \tanh x$

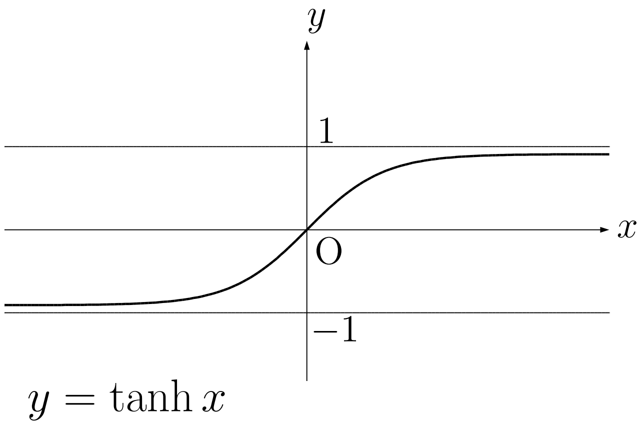


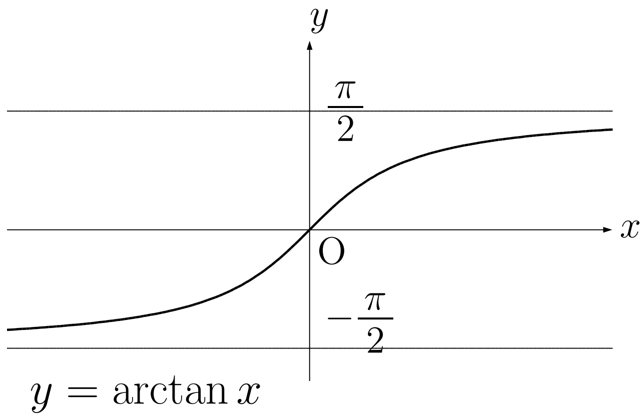
$y = \arctan x$

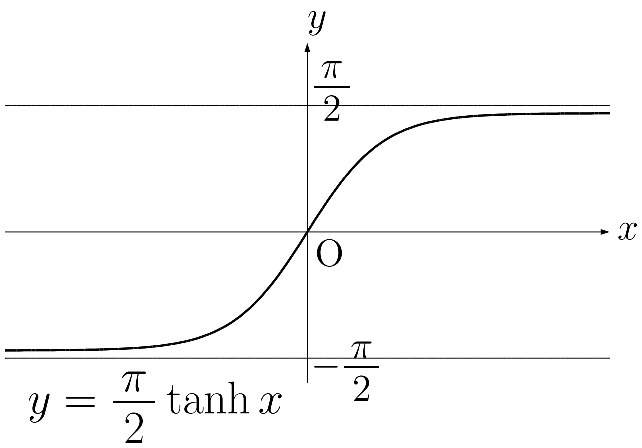


$y = \dfrac{\pi}{2} \tanh x$

$\tanh x$ と $\arctan x$



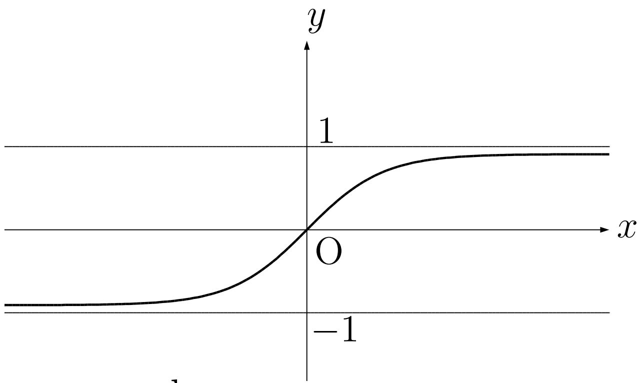




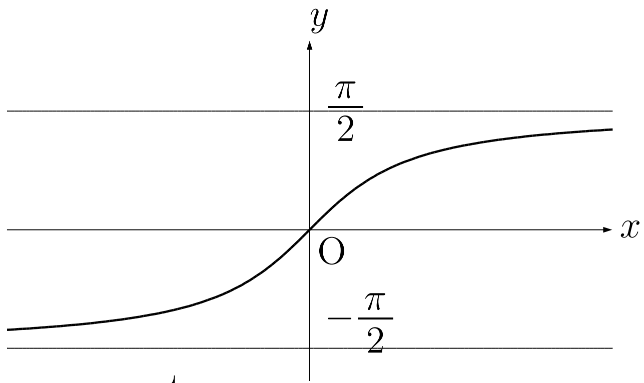
実は次の不等式が成立する：

$$1 < \frac{\arctan x}{\tanh x} < \frac{\pi}{2} \quad (x \neq 0)$$

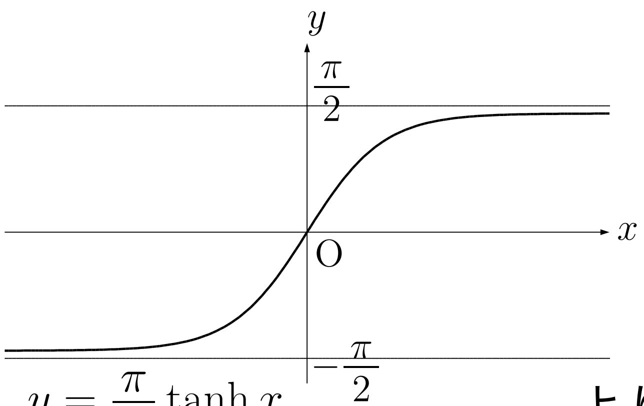
$\tanh x$ と $\arctan x$



$y = \tanh x$



$y = \arctan x$



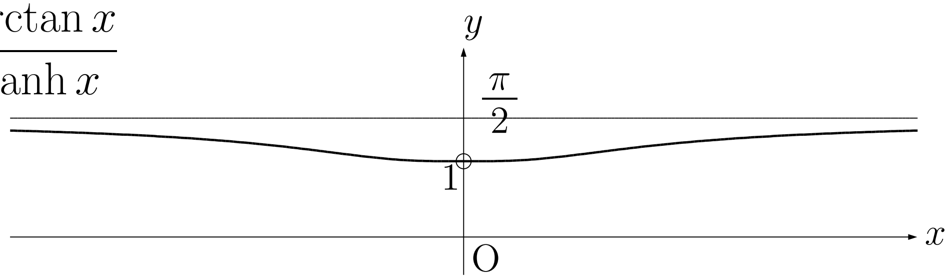
$y = \frac{\pi}{2} \tanh x$

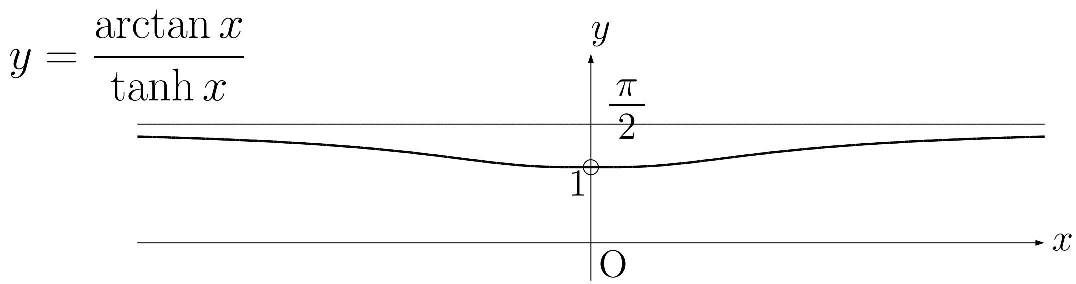
実は次の不等式が成立する：

$$1 < \frac{\arctan x}{\tanh x} < \frac{\pi}{2} \quad (x \neq 0)$$

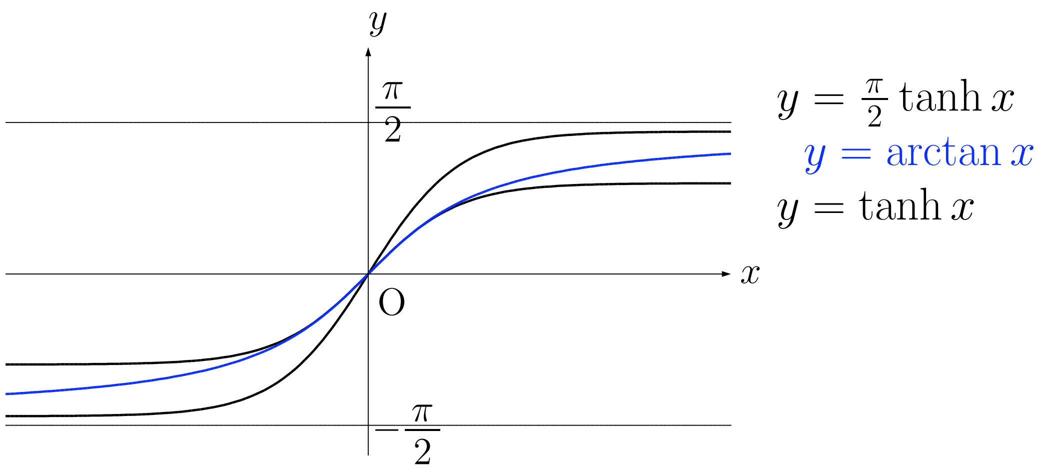
より詳しくは，$x > 0$ で $\dfrac{\arctan x}{\tanh x}$ は単調増加

$$y = \frac{\arctan x}{\tanh x}$$





$y = \dfrac{\arctan x}{\tanh x}$
y
$\dfrac{\pi}{2}$
1
x
O



y
$\dfrac{\pi}{2}$
$y = \frac{\pi}{2}\tanh x$
$y = \arctan x$
$y = \tanh x$
x
O
$-\dfrac{\pi}{2}$

$f(x) := \dfrac{\arctan x}{\tanh x}$ とおく.

$$f'(x) = \frac{1}{\tanh^2 x}\left(\frac{1}{x^2+1}\cdot\tanh x - \arctan x\cdot\frac{1}{\cosh^2 x}\right)$$
$$= \frac{\cosh x\sinh x - (x^2+1)\arctan x}{(x^2+1)\sinh^2 x} = \frac{\sinh 2x - 2(x^2+1)\arctan x}{2(x^2+1)\sinh^2 x}.$$

分子 $= g(x)$ とおくと, $g'(x) = 2\cosh 2x - 4x\arctan x - 2$. ゆえに

$$g''(x) = 4\sinh 2x - 4\arctan x - 4\frac{x}{x^2+1} = 4\left(\sinh 2x - \arctan x - \frac{x}{x^2+1}\right) =: 4h(x)$$

そして, $h'(x) = 2\cosh 2x - \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{x^2+1-x\cdot(2x)}{(x^2+1)^2}$

$$= 2\cosh 2x - \frac{x^2+1+(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 2\cdot\left(\cosh 2x - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right) > 0 \quad (x>0).$$

ゆえに $h(x)$ は狭義単調増加で $h(0)=0$ $\rightsquigarrow$ $x>0$ で $h(x)>0$ $\rightsquigarrow$ $g''(x)>0$ $(x>0)$

$\rightsquigarrow$ $g'(x)$ は狭義単調増加で $g'(0)=0$ $\rightsquigarrow$ $x>0$ で $g'(x)>0$ $\rightsquigarrow$ $g(x)$ は単調増加

$g(0)=0$ $\rightsquigarrow$ $x>0$ で $g(x)>0$. ゆえに $f'(x)>0$ となるから, $f(x)$ は単調増加.

$f^{-1}(x)$ と $\dfrac{1}{f(x)}$

$f^{-1}(x)$ と $\dfrac{1}{f(x)}$ が等しい事ってあるか ？

$f^{-1}(x)$ と $\dfrac{1}{f(x)}$ が等しい事ってあるか ？

一次分数函数 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ を考えてみる.

行列 $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対応させて, $f_A(x) := \dfrac{ax+b}{cx+d}$ とおこう.

(1) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, $f_E(x) = x$ $(\forall x)$.

(2) $f_{AB}(x) = f_A(f_B(x))$. すなわち, $f_{AB} = f_A \circ f_B$.

(3) α が数のとき, $f_{\alpha A}(x) = f_A(x)$ $(\forall x)$.

$f^{-1}(x)$ と $\dfrac{1}{f(x)}$ が等しい事ってあるか ？

一次分数函数 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ を考えてみる.

行列 $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対応させて，$f_A(x) := \dfrac{ax+b}{cx+d}$ とおこう.

(1) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$f_E(x) = x$ $(\forall x)$.

(2) $f_{AB}(x) = f_A(f_B(x))$. すなわち，$f_{AB} = f_A \circ f_B$.

(3) α が数のとき，$f_{\alpha A}(x) = f_A(x)$ $(\forall x)$.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持つなら，$A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

したがって，$f_A^{-1}(x) \overset{(1),(2)}{=} f_{A^{-1}}(x) \overset{(3)}{=} \dfrac{dx-b}{-cx+a}$

以下，$\det A = ad - bc = 1 \quad \cdots ①$ としておく.

$f_A^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)} \iff \dfrac{dx - b}{-cx + a} = \dfrac{cx + d}{ax + b}$ より，分母を払うと，

$$(dx - b)(ax + b) = (cx + d)(-cx + a).$$

以下，$\det A = ad - bc = 1 \quad \cdots ①$ としておく.

$f_A^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)} \iff \dfrac{dx - b}{-cx + a} = \dfrac{cx + d}{ax + b}$ より，分母を払うと，

$$(dx - b)(ax + b) = (cx + d)(-cx + a).$$

これが恒等式 $\iff ad = -c^2$，$b(d - a) = c(a - d)$，$-b^2 = ad$.

以下，$\det A = ad - bc = 1 \quad \cdots ①$　としておく．

$f_A^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)} \iff \dfrac{dx-b}{-cx+a} = \dfrac{cx+d}{ax+b}$ より，分母を払うと，

$$(dx-b)(ax+b) = (cx+d)(-cx+a).$$

これが恒等式 $\iff$ $ad = -c^2$，$b(d-a) = c(a-d)$，$-b^2 = ad$.

真ん中の式から，$(b+c)(a-d) = 0 \ \cdots ②$.

$c = -b$ とすると，$ad = -b^2$ を①に代入して，$0 = 1$（矛盾）.

ゆえに $c \fallingdotseq -b$ であり，$a = d$.　また $b^2 = c^2$ より，$b = c$.

①と合わせると，$a^2 - b^2 = 1$，かつ $a^2 = -b^2$ となる.

これより，$a = d = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$b = c = \pm\dfrac{i}{\sqrt{2}}$　（複号自由）.

以上より，$f(z) = \dfrac{z+i}{iz+1}$，$\dfrac{z-i}{-iz+1}$

変数は複素数で考える.（2年生で習う）

$f^{-1}(x)$ の原始函数

(1) $\displaystyle \int \log x\,dx = x\log x - \int \underbrace{x(\log x)'}_{=1}\,dx = x\log x - x$

あるいは $\log x = y$ とおくと，$x = e^y$，$dx = e^y\,dy$ より

$$\int \log x\,dx = \int ye^y\,dy = ye^y - \int e^y\,dt$$
$$= ye^y - e^y = x\log x - x$$

(2) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

あるいは, $y = \arcsin x$ とおくと, $x = \sin y$, $dx = \cos y\,dy$ より

$$\int \arcsin x\,dx = \int y\cos y\,dy = y\sin y - \int \sin y\,dy$$

$$= y\sin y + \cos y$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} \qquad \left(\because |y| \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

(3) $\displaystyle\int \arctan x\,dx$ も同様.

(2) $$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

あるいは，$y = \arcsin x$ とおくと，$x = \sin y$，$dx = \cos y\,dy$ より

$$\int \arcsin x\,dx = \int y\cos y\,dy = y\sin y - \int \sin y\,dy$$
$$= y\sin y + \cos y$$
$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} \qquad \left(\because |y| \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

(3) $\int \arctan x\,dx$ も同様.

- いつでもこんな風にうまく行くの ？

Yes！ $I := \int f^{-1}(x)\,dx$ の公式を導いてみよう.

Yes ! $\quad I := \int f^{-1}(x)\,dx$ の公式を導いてみよう.

(1) $y = f^{-1}(x)$ とおくと, $x = f(y)$, $dx = f'(y)\,dy$ より

$$
\begin{aligned}
I &= \int y f'(y)\,dy = y f(y) - \int f(y)\,dy \\
&= y f(y) - F(y) \qquad (F(x) \text{ は } f(x) \text{ の原始函数}) \\
&= x f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)).
\end{aligned}
$$

(2) $I = \int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int x\left\{f^{-1}(x)\right\}'\,dx$

$f(f^{-1}(x)) = x$ の両辺を x で微分：$f'(f^{-1}(x))\{f^{-1}(x)\}' = 1$.

ゆえに $\{f^{-1}(x)\}' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ となる．したがって

$$I = xf^{-1}(x) - \int \frac{x}{f'(f^{-1}(x))}\,dx.$$

(2) $I = \displaystyle\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int x\,\{f^{-1}(x)\}'\,dx$

$f(f^{-1}(x)) = x$ の両辺を x で微分：$f'(f^{-1}(x))\{f^{-1}(x)\}' = 1$.

ゆえに $\{f^{-1}(x)\}' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ となる．したがって

$$I = xf^{-1}(x) - \int \frac{x}{f'(f^{-1}(x))}\,dx.$$

ここで $y = f^{-1}(x)$ とおくと（初めからそうした方が良かった！）

(2) $I = \int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int x\,\{f^{-1}(x)\}'\,dx$

$f(f^{-1}(x)) = x$ の両辺を x で微分：$f'(f^{-1}(x))\{f^{-1}(x)\}' = 1$.

ゆえに $\{f^{-1}(x)\}' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ となる．したがって

$$I = xf^{-1}(x) - \int \frac{x}{f'(f^{-1}(x))}\,dx.$$

ここで $y = f^{-1}(x)$ とおくと（初めからそうした方が良かった！）

$f(y) = x$,　$dx = f'(y)\,dy$ より

$$\int \frac{x}{f'(f^{-1}(x))}\,dx = \int \frac{f(y)}{\cancel{f'(y)}}\,\cancel{f'(y)}\,dy = F(y) = F(f^{-1}(x))$$

$$\boxed{\int f^{-1}(x)\,dx = x f^{-1}(x) - F\big(f^{-1}(x)\big)} \qquad \left(F(x) := \int f(x)\,dx\right)$$

$$\boxed{\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - F\big(f^{-1}(x)\big)} \qquad \left(F(x) := \int f(x)\,dx\right)$$

(1) $f(x) = e^x$ のとき．$f^{-1}(x) = \log x$, $F(x) = e^x$ より

右辺 $= x\log x - e^{\log x} = x\log x - x$.

$$\boxed{\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - F\big(f^{-1}(x)\big)} \qquad \left(F(x) := \int f(x)\,dx\right)$$

(1) $f(x) = e^x$ のとき，$f^{-1}(x) = \log x$，$F(x) = e^x$ より

右辺 $= x\log x - e^{\log x} = x\log x - x$.

(2) $f(x) = \sin x$ のとき，$f^{-1}(x) = \arcsin x$，$F(x) = -\cos x$.

右辺 $= x\arcsin x + \cos(\arcsin x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

（$y = \arcsin x$ $(|y| \leqq \frac{\pi}{2})$ とおくと，$\sin y = x$，$\cos y \geqq 0$ より，

$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-x^2}$ となる．）

$$\boxed{\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - F\bigl(f^{-1}(x)\bigr)} \qquad \left(F(x) := \int f(x)\,dx\right)$$

(1) $f(x) = e^x$ のとき，$f^{-1}(x) = \log x$，$F(x) = e^x$ より

右辺 $= x\log x - e^{\log x} = x\log x - x$.

(2) $f(x) = \sin x$ のとき，$f^{-1}(x) = \arcsin x$，$F(x) = -\cos x$.

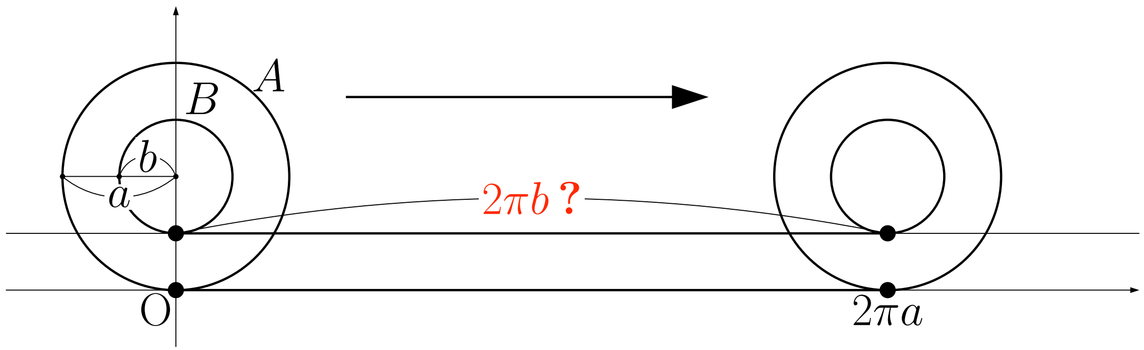
右辺 $= x\arcsin x + \cos(\arcsin x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

（$y = \arcsin x$ $(|y| \leqq \frac{\pi}{2})$ とおくと，$\sin y = x$，$\cos y \geqq 0$ より，

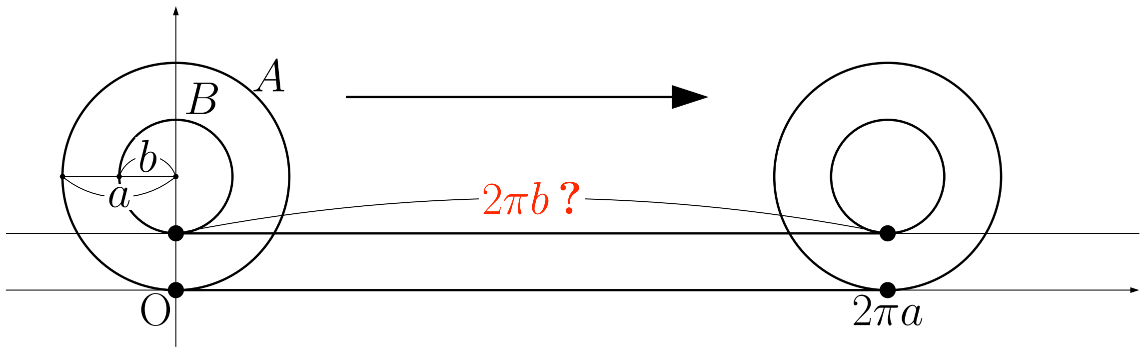
$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-x^2}$ となる.）

一般的公式を適用するより，個別に部分積分なり，置換積分を実行する方が効率が良い！

- 半径 a の円板Aに，半径 b（ただし$b < a$）の円板Bが，中心が一致するようにくっついている.
このとき，円板Aを滑らないように 1 回転させる.

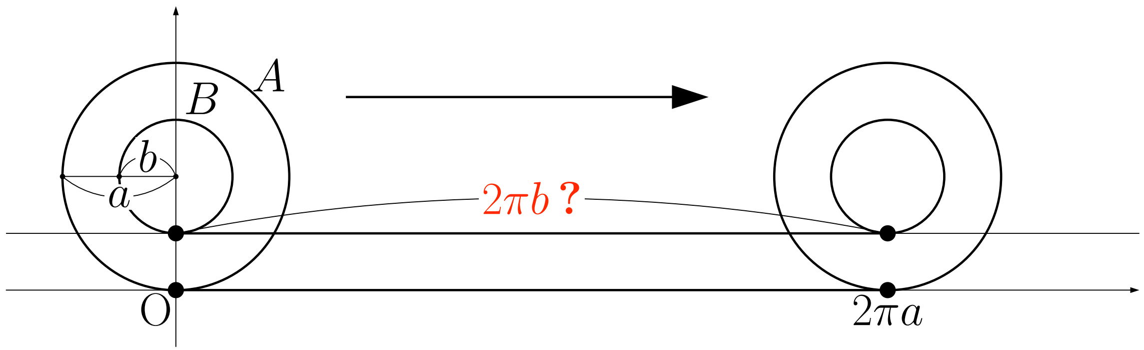


- 半径 a の円板Aに，半径 b（ただし$b < a$）の円板Bが，中心が一致するようにくっついている．
このとき，円板Aを滑らないように 1 回転させる．

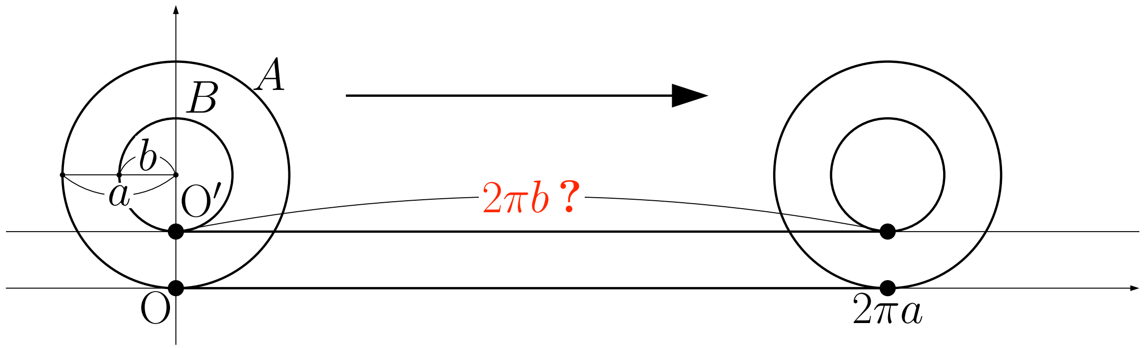


- $\rightsquigarrow$ **Movie 1**

- 半径 a の円板 A に，半径 b（ただし $b < a$）の円板 B が，
中心が一致するようにくっついている．
このとき，円板 A を滑らないように 1 回転させる．

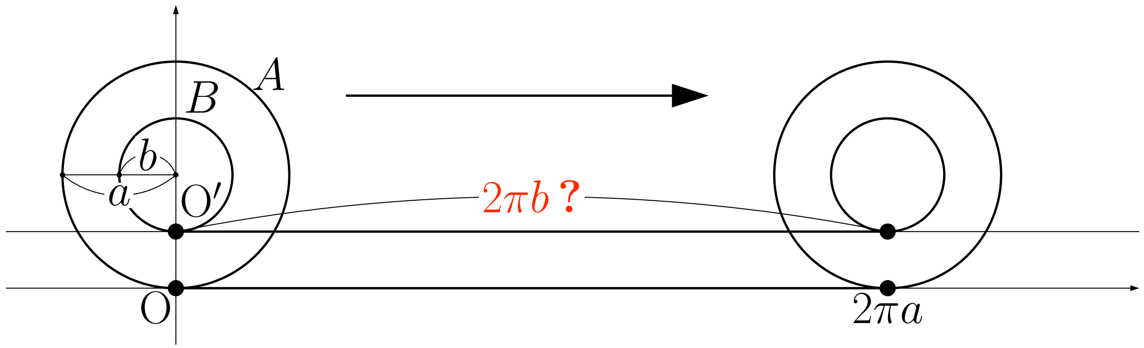


- $\rightsquigarrow$ **Movie 1**
- 最初 O と重なっていた円板 A 上の点の軌跡は **cycloid**
擺線（はいせん）（擺：訓読みはひら・く）
$\rightsquigarrow$ **Movie 2**



- 最初 O' と重なっていた円板 B 上の点の軌跡は **trochoid**
  余擺線（よはいせん）

$\rightsquigarrow$ **Movie 3**

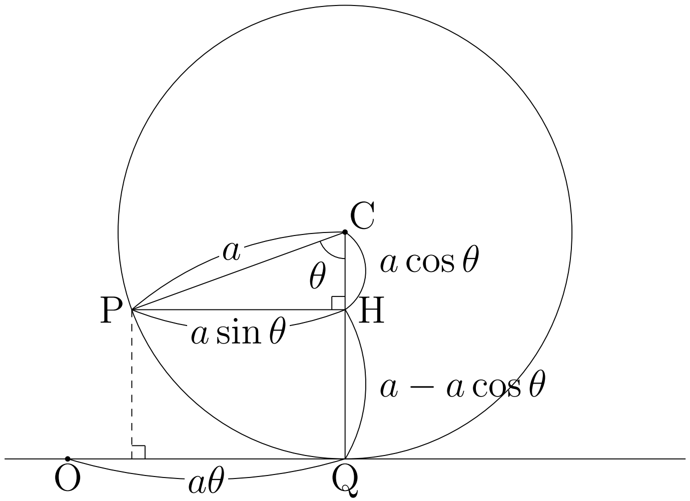


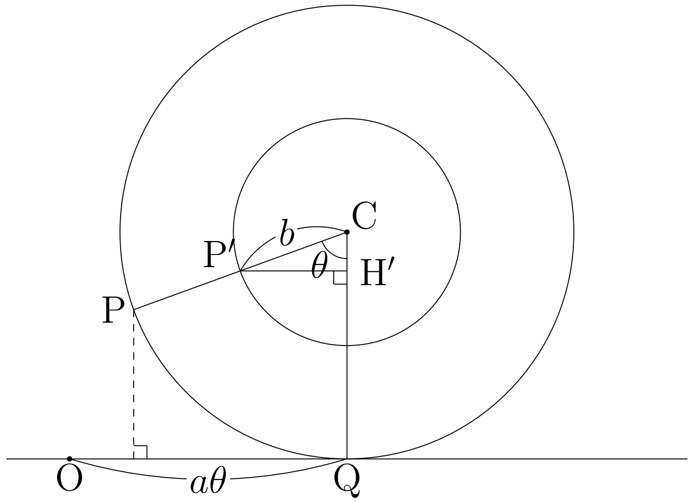
- 最初O'と重なっていた円板B上の点の軌跡は **trochoid**
  余擺線（よはいせん）

  ⇝ **Movie 3**

- 円板Bが，円板Aに拘束されず，滑らずに動けるなら，
  最初O'に重なっていた点の軌跡は当然 **cycloid**

  ⇝ **Movie 4**
  Movie4.GCF





上図より，$\mathrm{P}(a\theta - a\sin\theta,\ a - a\cos\theta)$.

サイクロイドのパラメータ表示：$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$

トロコイドのパラメータ表示：$\begin{cases} x = a\theta - b\sin\theta \\ y = a - b\cos\theta \end{cases}$

トロコイドのパラメータ表示：$\begin{cases} x = a\theta - b\sin\theta \\ y = a - b\cos\theta \end{cases}$

回転角 θ の点がサイクロイド上にあるなら,

$$\begin{pmatrix} b(\theta - \sin\theta) \\ b(1 - \cos\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\theta - b\sin\theta \\ a - b\cos\theta \end{pmatrix} \text{ のはず.}$$

結局 x 軸方向に $(a-b)\theta$ だけ引っ張られた格好になっている.

$\rightsquigarrow$ **Movie 5**

トロコイドのパラメータ表示：$\begin{cases} x = a\theta - b\sin\theta \\ y = a - b\cos\theta \end{cases}$

回転角θの点がサイクロイド上にあるなら,

$$\begin{pmatrix} b(\theta - \sin\theta) \\ b(1 - \cos\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\theta - b\sin\theta \\ a - b\cos\theta \end{pmatrix}$$ のはず.

結局 x 軸方向に $(a-b)\theta$ だけ引っ張られた格好になっている.
$\rightsquigarrow$ **Movie 5**

大きい円板をくっつけると面白い. $\rightsquigarrow$ **Movie 6**

基準円より小さい円からできる **trochoid** を **hypotrochoid**
基準円より大きい円からできる **trochoid** を **epitrochoid**

教科書にはない極座標表示の曲線

- $r = |\tan\theta|^{\frac{1}{|\tan\theta|}} \quad (0 < \theta < \pi)$

教科書にはない極座標表示の曲線

- $r = |\tan\theta|^{\frac{1}{|\tan\theta|}} \quad (0 < \theta < \pi)$

$$\lim_{\theta\to 0} |\tan\theta|^{\frac{1}{|\tan\theta|}} = \lim_{x\to +0} x^{1/x} = \lim_{x\to +0} e^{\frac{\log x}{x}} = 0$$

$$\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}} |\tan\theta|^{\frac{1}{|\tan\theta|}} = \lim_{x\to \infty} x^{1/x} = \lim_{x\to \infty} e^{\frac{\log x}{x}} = e^0 = 1$$

θのところに$\pi - \theta$を代入しても r の値は変わらない.

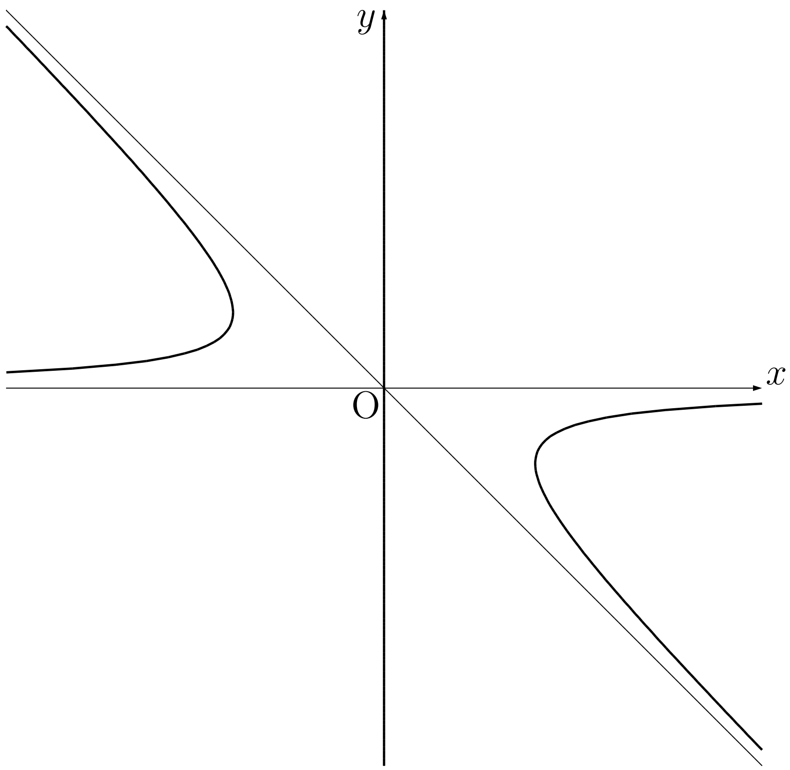
$\rightsquigarrow$ **PolarGraph1**： $r = 4|\tan\theta|^{\frac{1}{|\tan\theta|}} \quad (0 < \theta < \pi)$

$x + \dfrac{1}{y}$ と $\dfrac{1}{x + y}$

$x+\dfrac{1}{y}$ と $\dfrac{1}{x+y}$

$$
\begin{aligned}
x+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y} &\iff \frac{xy+1}{y}=\frac{1}{x+y} \\
&\iff (xy+1)(x+y)=y \\
&\iff x(y^2+xy+1)=0 \\
&\iff x=0 \text{ または } y^2+xy+1=0 \\
&\iff x=0 \text{ または } x=-\left(y+\frac{1}{y}\right)
\end{aligned}
$$

$x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x+y}$ となるところ



(1) $\boxed{\quad A \quad}$ は $\boxed{\quad B \quad}$ である.
(2) $\boxed{\quad A \quad}$ は $\boxed{\quad B \quad}$ ではない.

問：**(1)** と **(2)** の文が成立するように空欄を補充せよ．ただし，**(1)** と **(2)** の $\boxed{\quad A \quad}$ には同じ文字，**(1)** と **(2)** の $\boxed{\quad B \quad}$ にも同じ文字が入る.

(1) $\boxed{\quad\mathrm{A}\quad}$ は $\boxed{\quad\mathrm{B}\quad}$ である.
(2) $\boxed{\quad\mathrm{A}\quad}$ は $\boxed{\quad\mathrm{B}\quad}$ ではない.

問：**(1)** と **(2)** の文が成立するように空欄を補充せよ．ただし, **(1)** と **(2)** の $\boxed{\quad\mathrm{A}\quad}$ には同じ文字, **(1)** と **(2)** の $\boxed{\quad\mathrm{B}\quad}$ にも同じ文字が入る.

(1) $\boxed{\quad\text{この文}\quad}$ は $\boxed{\quad 1\text{行目}\quad}$ である.
(2) $\boxed{\quad\text{この文}\quad}$ は $\boxed{\quad 1\text{行目}\quad}$ ではない.

変だけど，結果が正しい約分

$$\frac{37^3+13^3}{37^3+24^3}=\frac{37+13}{37+24} \qquad \frac{50^3+48^3}{50^3+2^3}=\frac{50+48}{50+2}$$

$$\frac{127^3+41^3}{127^3+86^3}=\frac{127+41}{127+86}$$

変だけど，結果が正しい約分

$$\frac{37^3 + 13^{\cancel{3}}}{37^3 + 24^3} = \frac{37 + 13}{37 + 24} \qquad \frac{50^3 + 48^3}{50^3 + 2^3} = \frac{50 + 48}{50 + 2}$$

$$\frac{127^3 + 41^3}{127^3 + 86^3} = \frac{127 + 41}{127 + 86}$$

種明かし：$\dfrac{a^3 + b^3}{a^3 + (a-b)^3} = \dfrac{a + b}{a + (a-b)}$

左辺の分子 $= (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

左辺の分母 $= \big(a + (a-b)\big)\big(a^2 - a(a-b) + (a-b)^2\big)$

$$= \big(a + (a-b)\big)(a^2 - ab + b^2)$$