平成 11 年度　積分論　試験問題

（担当：野村隆昭）

1999年9月30日実施　　時間 **9:30 〜 12:00**

★ [**1**]〜[**4**] のすべての問に解答せよ．

★ 問題は **用紙の両面** にある．

★ 解答用紙は **片面のみ** を使用のこと．使用枚数に制限はない．

★ 1 枚の解答用紙に大問を混ぜて解答しないこと(得点集計上間違いが生じる可能性がある)．
たとえば [**3**] と [**4**] の解答を同一の用紙に書かないこと．

この試験問題では，問題 [**1**] を除いて考える測度はすべて $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度であり，それを簡単のため dx で表す．また函数といえば断りのない限り複素数値であるとする．

[**1**] (1) X を 1 つの集合とし，$A_1, A_2, \ldots$ は X の部分集合とするとき，次の等式を示せ：

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k\right) = \{x \in X\ ;\ \text{無数の } k \text{ に対して } x \in A_k\}.$$

この集合を $\limsup_{k\to\infty} A_k$ で表す．

(2) 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ における可測部分集合の列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ が $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < +\infty$ をみたしているとき，$\mu\Bigl(\limsup_{k\to\infty} A_k\Bigr) = 0$ となっていることを示せ．

[**2**] 以下の各命題が正しいかどうか，理由とともに述べよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$ ならば，$\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ である．

(2) $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 可積分な函数の列が $\mathbb{R}$ 上一様収束すれば，その極限函数もまた $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 可積分である．

(3) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の実数値函数とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $f(x) > -\varepsilon$ (a.e.x) が成り立てば，$f(x) \geqq 0$ (a.e.x) が成り立つ．

(4) $\mathbb{R}$ 上の函数 f の不連続点の集合が零集合ならば，ある連続函数とほとんどいたる所一致する．

(5) $\mathbb{R}$ 上いたる所不連続な函数でも，連続函数とほとんどいたる所一致することがあり得る．

裏面に続く

[3] f は区間 $[0,\infty)$ 上の Lebesgue 可積分な函数とする．このとき

$$\varphi(t) := \int_0^\infty e^{-tx} f(x)\, dx \qquad (t > 0)$$

は開区間 $(0,\infty)$ 上の微分可能な函数であることを示せ.

[4] 次の等式を示せ：

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \frac{\sin \varepsilon x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}.$$

【警告】問題 **[3]**, **[4]** は積分論における基本定理を使うことになるが，何故その定理が適用可能となるかということを正しく述べていない答案には零点をつけるからそのつもりで解答するように.

以上