# 平成 10 年度　函数解析 I　試験問題　（担当：野村隆昭）

1998年9月28日実施　　時間 **10:30 〜 12:30**

- ⋆ [**1**], [**2**] のすべての問に解答せよ．
- ⋆ 解答用紙は **片面のみ** を使用のこと．使用枚数に制限はない．
- ⋆ 1 枚の解答用紙に [**1**], [**2**] の小問の解答を混在させぬこと．
- ⋆ 先行する小問の結果は（解けなくても）自由に用いてよい．

---

[**1**]　エルミート内積 $(\cdot\,|\,\cdot)$ を持つ複素 Hilbert 空間 $H$ の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x \in H$ に弱収束しているものとする．ただし，$\|x\| := \sqrt{(x\,|\,x)}$ である．

(1) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leqq \|x\|$ ならば $\|x_n - x\| \to 0$ であることを示せ．

(2) $H$ 上の任意の有界線型作用素 $T$ に対して，点列 $\{Tx_n\}$ は $Tx$ に弱収束することを示せ．

(3) $M$ はノルム位相に関する $H$ の閉部分空間とする．もしすべての $n = 1, 2, \ldots$ に対して $x_n \in M$ ならば $x \in M$ であることを示せ．　（Hint: (2)を使ってみよ.）

[**2**]　閉区間 $[-1, 1]$ で連続な複素数値函数の全体がなすベクトル空間に $\|f\| := \displaystyle\sup_{-1 \leqq t \leqq 1} |f(t)|$ でノルムを入れた空間を $C[-1, 1]$ で表す．

(1) $\|\cdot\|$ は実際にノルムであること，および $C[-1, 1]$ は Banach 空間になっていることを示せ．

(2) $C[-1, 1]$ は Hilbert 空間ではないことを示せ．

(3) 次式によって $C[-1, 1]$ 上の有界線型作用素 $T$ が定まり，$\|T\| = 2$ となることを示せ：

$$Tf(s) := \int_{-1}^{s} f(t)\,dt \qquad (f \in C[-1, 1],\ -1 \leqq s \leqq 1).$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ を求めよ．

（Hint: $\|T^n\|$ を調べるために，$|T^n f(s)|$ を帰納的に評価する.）

(5) 作用素 $T$ はコンパクトであることを示せ．　（Hint: Ascoli-Arzelà.）

(6) 作用素 $T$ による閉単位球 $B := \{f \in C[-1, 1]\,;\, \|f\| \leqq 1\}$ の像が閉集合でないことを，次の函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を用いて示せ：

$$f_n(t) := \begin{cases} 0 & (-1 \leqq t \leqq 0)\,, \\ nt & \left(0 < t \leqq \dfrac{1}{n}\right), \\ 1 & \left(\dfrac{1}{n} < t \leqq 1\right). \end{cases}$$

**以上**