展望講義・レポート問題 3

(1997/11/25)　　（担当：野村隆昭）

---

[1]　函数 $\Phi \in \mathcal{Y}_k^L$ を $\varphi(t) \in \mathbb{C}[t]$ を用いて $\Phi(u) = \varphi(u \cdot e_n)$ $(u \in S)$ と表したとき，$\varphi(t)$ は次の常微分方程式をみたすことを示せ ($' = d/dt$)：

$$(1-t^2)\varphi''(t) - (n-1)\,t\,\varphi'(t) + k(k+n-2)\varphi(t) = 0.$$

[2]　Gauss の超幾何微分方程式

$$z(1-z)\,\frac{d^2y}{dz^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\,z\,]\,\frac{dy}{dz} - \alpha\beta y = 0$$

を考える $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C})$．$\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ のとき，この微分方程式の解 $y = y(z)$ で開単位円板 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$ で正則，かつ $y(0) = 1$ となるものが唯一つ存在することを直接 $y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ $(a_j \in \mathbb{C},\ a_0 = 1)$ より出発して示せ．

[3]　各 $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ と $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$q_c^k(u) := (c_1u_1 + \cdots + c_nu_n)^k \qquad (u = (u_1, \ldots, u_n) \in S)$$

とおく．また $\mathcal{N} := \{c \in \mathbb{C}^n\ ;\ c_1^2 + \cdots + c_n^2 = 0\}$ とする．ベクトル空間 $\mathcal{Y}_k$ は $\{q_c^k\ ;\ c \in \mathcal{N}\}$ で生成されることを示せ．

(Hint：$g \in O(n)$ のとき，$c \in \mathcal{N} \implies gc \in \mathcal{N}$ 及び $T(g)q_c^k = q_{gc}^k$ に注意．
また $SO(n)$ の $\mathcal{Y}_k$ 上の表現 $g \mapsto T(g)$ の既約性にも注意.)

[4]　超球多項式 $P_k^{1/2}(t)$ を単に $P_k(t)$ と表す．すなわち $P_k(t) = F\left(-k,\ k+1;\ 1;\ \dfrac{1-t}{2}\right)$ であり，それは常微分方程式

$$(1-t^2)\,\frac{d^2y}{dt^2} - 2\,t\,\frac{dy}{dt} + k(k+1)y = 0$$

の $y(1) = 1$ をみたす唯一つの解である．

(1)　$\dfrac{d^k}{dt^k}\,(t^2-1)^k$ が同じ微分方程式をみたすことから，次の Rodrigues の公式を導け：

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k\,k!}\,\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k.$$

(2)　Rodrigues の公式で $(t^2-1)^k = (t+1)^k(t-1)^k$ として Leibniz の公式を使うことにより次の組合せ論的公式を導け：

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 x^j = (1-x)^k\,P_k\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

レポート問題 3 ・終