展望講義・レポート問題 2

(1997/11/11)　　　　（担当：野村隆昭）

---

[1]　微分内積 $(p\,|\,q) := \left(p\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\overline{q}\right)(0)$ は $\mathcal{P}$ 上に内積を定めていること，及び $k \neq l$ ならば $\mathcal{P}_k \perp \mathcal{P}_l$ となっていることを確かめよ.

[2]　一般に作用素 A, B に対して，$[A,B] := AB - BA$ とおく．$E := \sum_{k=1}^{n} x_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ を Euler 作用素とし，函数 $r^2 := x_1^2 + \cdots + x_n^2$ をかける作用素を同じ r^2 で表す.

(1) 恒等作用素を I で表すとき，次の 3 つの関係式が成り立つことを示せ：

$$[\Delta, r^2] = 4E + 2nI, \qquad [\Delta, E] = 2\,\Delta, \qquad [E, r^2] = 2\,r^2.$$

(2) $H := E + \dfrac{n}{2}\,I$，$X := -\dfrac{1}{2}\,r^2$，$Y := \dfrac{1}{2}\,\Delta$ とおく．3 つの作用素 H, X, Y は 3 次元の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を張り，$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) := \{T \in M(2,\mathbb{R})\,;\ \mathrm{tr}\,T = 0\}$ に同型であることを示せ.
$\left(\text{Hint: } \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \text{ の基底 } h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ を考え，交換関係を調べよ.}\right)$

[3]　$p, q \in \mathcal{H}_k$ とする．p, q の微分内積 $(p\,|\,q)$ と，p, q を S に制限して $L^2(S)$ でとった内積 $(p\,|\,q)_2 := \displaystyle\int_S p(u)\overline{q(u)}\,d\sigma(u)$ との間に成立する関係式：

$$(p\,|\,q) = \frac{2^{k-1}}{\pi^{n/2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right) \cdot (p\,|\,q)_2$$

を次の手順で示せ（ここで Γ はガンマ函数である）：

(1) 定義より $(p\,|\,q) = \left(p\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\overline{q}\right)$ であり（0 で値を取る必要がない），部分積分によって，

$$(p\,|\,q) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overline{q}\right)(x)\, e^{-\|x\|^2/2}\,dx = \frac{(-1)^k}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{q(x)} \left\{p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) e^{-\|x\|^2/2}\right\} dx.$$

(2) 等式 $p\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) e^{-\|x\|^2/2} = \dfrac{(-i)^k}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|^2/2}\, p(y)\, e^{-ix\cdot y}\,dy$ の右辺において Bochner-Hecke 等式を使うと，$p\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) e^{-\|x\|^2/2} = (-1)^k\, p(x)\, e^{-\|x\|^2/2}$ を得る.

(3) 最後に積分を極座標へ変換する.

[4]　講義中の定理：$L^2(S) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{Y}_k$ (Hilbert 直和)　の証明の詳細を与えよ.

レポート問題 2 ・終