展望講義・レポート問題 1

(1997/11/4)　　　　　　（担当：野村隆昭）

---

[1]　実直交群 $O(n) = O(n, \mathbb{R})$ の連結成分は 2 つで，単位元を含む方は $SO(n) = SO(n, \mathbb{R}) := \{g \in O(n)\ ;\ \det g = 1\}$ であることを示せ.

[2]　$O(n)$ はコンパクトであることを示せ.

[3]　$SO(n)$ は $\mathbb{R}^n$ の単位球面 S に推移的に作用することを示せ.

[4]　$e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S$ における $SO(n)$ の等方部分群(固定部分群) $L := \{g \in SO(n)\ ;\ ge_n = e_n\}$ は次のようになることを示せ：　$L = \left(\begin{array}{c|c} SO(n-1) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$.

[5]　問題 [4] の L の $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in S$ を通る軌道 $Lu := \{gu\ ;\ g \in L\}$ は次の集合（e_n を極とする緯線の一つ）であることを示せ：

$$\left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in S\ ;\ v_n = u_n \right\}.$$

[6]　$\mathbb{R}^n$ 上のなめらかな函数 f に対して，等式 $T(g)\Delta f = \Delta T(g) f$ が任意の $g \in O(n)$ に対して成り立つことを示せ.

レポート問題 1 ・終