平成９年度　函数解析 II　試験問題　（担当：野村隆昭）

1998年2月16日実施　　時間 $\boxed{\textbf{10:30 〜 12:30}}$

⋆ [**1**] と [**2**] の両方に解答せよ.

⋆ 問題は **用紙の両面** にある.

⋆ 解答用紙は縦長にして **片面のみ** を使用のこと.

⋆ 1 枚の解答用紙上に [**1**] と [**2**] の解答を混在させぬこと.

⋆ 先行する小問の結果は（解けなくても）自由に用いてよい.

[**1**]　複素 Hilbert 空間 $H = L^2[0,1]$ で考える．内積は $(f\,|\,g) := \displaystyle\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$ で，ノルムは $\|f\| := \sqrt{(f\,|\,f)}$ である.

(1) 各 $f \in H$ に対して，積分 $\displaystyle\int_0^t f(s)\,ds$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ は意味を持ち，次の不等式が成り立っていることを示せ：　$\displaystyle\left|\int_0^t f(s)\,ds\right| \leqq \sqrt{t}\,\|f\|.$

(2) 等式 $Tf(t) := \displaystyle\int_0^t f(s)\,ds$ によって H 上の有界線型作用素 T が定義できて，$\|T\| \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ.

(3) 作用素 T は compact であることを，Ascoli-Arzelà の定理を応用して示せ.

(4) さらに T は Hilbert-Schmidt 作用素でもあることを示し，その Hilbert-Schmidt ノルムを求めよ.

(5) 作用素 T の共役作用素 T^* を積分作用素として表せ．そして作用素 TT^* は

$$TT^*f(t) = \int_0^1 \min(t,s)f(s)\,ds$$

と表される積分作用素であることを示せ.

(6) 作用素 TT^* の固有値は，存在すると仮定して，すべて正であることを示せ.

(7) 作用素 TT^* の固有値をすべて求め，それぞれの固有値に対応する固有函数でノルムが 1 のもの一つずつ求めよ.（ある 2 階の常微分方程式を境界条件 $f(0) = f'(1) = 0$ で解くことになる．）

(8) 一般に Hilbert 空間上の有界線型作用素 A に対して，$\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|}$ であること（要証明）に注意して，$\|T\| = \dfrac{2}{\pi}$ であることを示せ $\left(\text{Remark}：\dfrac{2}{\pi} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

裏面に続く

[2]　複素 Hilbert 空間 $H = L^2(\mathbb{R})$ で考える．本問では，$\mathbb{R}$ 上の台が compact な C^∞ 函数の全体 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ が H で稠密であることは証明なしで認めよう．

次の部分空間 D を考える（ただし $C^1(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の 1 回連続微分可能な函数の全体）：

$$D := \{f \in H \cap C^1(\mathbb{R})\ ;\ f' \in H\}.$$

そして D を定義域とする H での線型作用素 $Tf = if'$ を考える．

(1) $f \in D$ のとき，$(|f|^2)' = f'\bar{f} + f\,\bar{f}'$ の両辺を区間 $[a, b]$ で積分して，$\lim_{t\to\pm\infty} |f(t)|$ が存在すること，従って $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$ であることを示せ．

(2) 作用素 T は非有界であること，及び対称 $(T \subset T^*)$ であることを示せ．

(3) $T \pm iI$ の値域は H で稠密であることを示せ．

$$\left(\begin{array}{l}\text{各 } \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ に対して，微分方程式 } if' \pm if = \psi \text{ が } f \in D \text{ となる解 } f \text{ を持つか} \\ \text{— というように問題を捉える．}\end{array}\right)$$

(4) 作用素 T の閉包を $\overline{T}$ とする．このとき，$\overline{T} \pm iI$ は全射であることを示せ．

（これより講義中の定理を使うと，$\overline{T}$ は自己共役 $(\overline{T} = \overline{T}^*)$ であることがわかる．）

以上