微分積分学 B・演習問題 1

(1996/10/2)　　　　（担当：野村隆昭）

---

[1] $\mathbb{R}$ において有理数の集合 $\mathbb{Q}$ の境界は何か.

[2] $\mathbb{R}^2$ の開集合で境界が 2 点から成るものの例を 1 つあげよ.

[3] 集合 $E := \left\{(x,y)\ ;\ y \neq \sin\dfrac{1}{x}\ (x>0)\right\}$ は開集合か？

[4] λ を実パラメタとするとき，曲面 $\{(x,y,z)\ ;\ x^2+y^2-z^2=\lambda\}$ を描け.
（$\lambda>0$, $\lambda<0$, $\lambda=0$ で場合を分ける.）

[5] $f(x,y,z) := \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ のとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$ を示せ.
$\mathit{\Delta} := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ $\left(\text{一般に } \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$ を**ラプラシアン**という.

[6]（10 **月** 9 **日提出のレポート問題**）
$u(x,y,z,t) := \dfrac{1}{t^{3/2}}\ \exp\left(-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right)$ $(t>0)$ とおくとき，$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathit{\Delta} u$ であることを示せ．ただし [5] と同じく，$\mathit{\Delta} := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ である.

$\boxed{\text{演習問題 1 終}}$

微分積分学 B ・演習問題 2

(1996/10/9)　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

<u>極値問題.</u>　臨界点を求め、 極大極小を判定せよ.

[**1**]　$f(x, y) = x^3 - x - y^2$.

[**2**]　$f(x, y) = (x^2 y - x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2$.

[**3**]　$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$.

[**4**]　$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2$.

[**5**]　$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.

<u>問題の函数に対するコメント</u>

[**1**] 臨界点は 1 つの極大点と鞍点（しかしこの極大点は最大点ではない）.

[**2**] 臨界点は 2 つの極小点のみ（極大点はない）.

[**3**] 臨界点はただ 1 つでそれは極大点（しかし最大点ではない）.

[**4**] 退化した臨界点が 3 つ. 内 2 つは極小点（最小点）. 残りの 1 つは鞍点.

[**5**] 極小点ではないが, どの方向からも極小となる退化した臨界点が 1 つ.

[**6**]（10 **月** 16 **日提出のレポート問題**）

$$f(x, y) = x^3 - 3x + xy^2.$$

演習問題 2 終

微分積分学 B ・ 演習問題 3

(1996/10/16)　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

[**1**]　次の函数 f は原点で連続か？

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)), \\ 0 & ((x,y) = (0,0)). \end{cases}$$

[**2**]　次の函数 f は $\lim\limits_{y\to 0}\bigl(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\bigr)$ も $\lim\limits_{x\to 0}\bigl(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\bigr)$ も共に存在しないが，原点で連続であることを示せ：

$$f(x,y) := \begin{cases} (x+y)^2 \cos\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y} & (xy \neq 0), \\ 0 & (xy = 0). \end{cases}$$

[**3**]　次の函数 f について $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ であることに注意し，原点で微分可能であること，及び偏導函数は原点で連続でないことを示せ：

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\,\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)), \\ 0 & ((x,y) = (0,0)). \end{cases}$$

[4]（10 **月** 23 **日提出のレポート問題**）

次の函数 f は原点で連続か？

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)), \\ 0 & ((x,y) = (0,0)). \end{cases}$$

演習問題 3 終

微分積分学 B・演習問題 4

(1996/10/23)　　　　（担当：野村隆昭）

以下考える函数は十分なめらかであると仮定する．

[**1**]　$z = f(x, y)$, $\begin{cases} x = u^2 + 2vw \\ \\ y = v^2 + 2wu \end{cases}$ のとき，次式を示せ：

$$(v^2 - wu)\,\frac{\partial z}{\partial u} + (u^2 - vw)\,\frac{\partial z}{\partial v} + (w^2 - uv)\,\frac{\partial z}{\partial w} = 0.$$

[**2**]　$g(u, v) = f\big((\cosh u)\cos v,\ (\sinh u)\sin v\big)$ とおくとき次式を示せ：

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{1}{2}\,(\cosh 2u - \cos 2v)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

[**3**]　T は 3×3 実直交行列であるとする．すなわち T は 3 次実正方行列で，${}^tTT = E$（E は 3 次の単位行列）をみたすとする．$\mathbb{R}^3$ 上の函数 f に対して $g(x) := f(Tx)$ $(x \in \mathbb{R}^3)$ とおくとき，$\varDelta g(x) = (\varDelta f)(Tx)$ であることを示せ．ただし $\varDelta$ は Laplacian である．

[**4**]（10 **月** 30 **日提出のレポート問題**）

$z = f(x, y)$，$x = \dfrac{u}{u^2 + v^2}$，$y = \dfrac{v}{u^2 + v^2}$ のとき次式を示せ：

$$(x^2 + y^2)(z_{xx} + z_{yy}) = (u^2 + v^2)(z_{uu} + z_{vv}).$$

$\boxed{\text{演習問題 4 終}}$

微分積分学 B ・演習問題 5

(1996/10/30)　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

[**1**] $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$ の解 $z = f(x, y)$ で，$f(x, 0) = \sin x$，$f(0, y) = \sin y$ となるものを求めよ．

[**2**] C^2 級の函数 $f(x, y)$ は $f_y \neq 0$ をみたしているとする．$f(x, y) = 0$ から定まる陰函数 $y = g(x)$ について次式がなりたつことを示せ：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{f_y^3}.$$

[**3**] 平面の極座標について $r = f(\theta)$ と表される曲線が直交座標で $y = g(x)$ と表されるとき，次式を示せ：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}.$$

[**4**]（11 **月** 6 **日提出のレポート問題**）

方程式 $xz^2 + e^z + y = 0$ は点 $(x, y, z) = (1, -1, 0)$ の近傍で陰函数 $z = g(x, y)$ を定めることを確かめ，偏微分係数 $g_x(1, -1)$，$g_y(1, -1)$ を求めよ．

$\boxed{\text{演習問題 5 終}}$

微分積分学 B ・演習問題 6

(1996/11/6)　　　　　　（担当：野村隆昭）

[**1**]　$x^2+y^2=1$ のとき，$f(x,y):=xy^3$ の最大値，最小値を Lagrange の乗数法によって求めよ．

$$\left(\begin{array}{l}\text{極値点の候補者は 6 点現れるが，本問ではそれらの点}\\ \text{での } f(x,y) \text{ の値を比較すれば十分であることに注意．}\end{array}\right)$$

[**2**]　$f(x,y)=0$ から定まる陰函数 $y=g(x)$ が 2 回微分可能なとき，$g(x)$ の極値の判定法について述べよ．

[**3**]　写像 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を $F(x,y,z)=(\sin(x+y+z),\ \cos(x-y+z),\ e^{x+y-z})$ によって定義するとき，F は点 $\big(\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4},0\big)$ の近傍で単射となることを示し，その逆写像の点 $F\big(\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4},0\big)$ における Jacobi 行列を求めよ．

[4]（11 **月** 13 **日提出のレポート問題**）

写像 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を $F(x,y)=(x^2-y^2,\ 2xy)$ によって定義する．

(1)　F は原点以外の点の近傍では単射であるが，$\mathbb{R}^2\setminus\{0\}:=\{(x,y)\ ;\ (x,y)\neq 0\}$ では単射でないことを示せ．

（前半は Jacobian の計算．後半は F の正体に注意．複素平面では $z\mapsto z^2$．）

(2)　F は $\mathbb{R}^2$ への全射であることを示せ．

(3)　座標軸に平行な直線の F による像はどんな曲線か．

$\boxed{\text{演習問題 6 終}}$

微分積分学 B · 演習問題 7

(1996/11/13)　　　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

[**1**]　$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$　$(x \neq 0)$ は有界函数であることを示せ.

[**2**]　$f(x) = x^2$ は開区間 $(0, 1)$ で一様連続であることを定義から直接に示せ.

[**3**]　$f(x) = \sin(x^2)$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続か.

[**4**]　$\mathbb{R}^2$ の部分集合 E に対して，χ_E は E の定義函数を表すものとする．函数 χ_E の不連続点は E の境界に一致することを示せ.

[**5**]（11 **月** 27 **日提出のレポート問題**）

$\mathbb{R}^2$ の部分集合の定義函数について次の (1), (2) を示せ.

(1)　$\chi_{E\cap F} = \chi_E \chi_F = \min(\chi_E, \chi_F)$.

(2)　$\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E\cap F} = \max(\chi_E, \chi_F)$.

演習問題 7 終

微分積分学 B ・演習問題 8

(1996/11/27)　　　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

積分の計算.

[1] $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\,;\,y \leqq x \leqq y^2,\ 1 \leqq y \leqq \sqrt{3}\}.$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{2}\log 2\right)$$

[2] $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\,;\,2x \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}.$

$$\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{16}{9}\right)$$

[3] 変数変換 $x=u$, $y=u\tan\theta$ を用いて $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right)dx = \frac{\pi}{4}$ を示せ.

[4] $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}},\quad D=\{(x,y,z)\,;\,x^2+y^2+z^2 \leqq 1\}.\qquad \left(\frac{2\pi}{3}\right)$

（3重積分を $\int_{-1}^1 dx\left(\iint_{B_x}\cdots\,dydz\right)$, $B_x=\{(y,z)\,;\,y^2+z^2 \leqq 1-x^2\}$ とせよ.）

[5] $D := [0,1]\times[a,b]$ $(0<a<b)$ 上で函数 $f(x,y)=x^y$ を 2 通りに逐次積分することにより, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}\,dx = \log\frac{b+1}{a+1}$ を示せ.

[6]（12 **月** 4 **日提出のレポート問題**）

$$\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\int_y^{\sqrt{1-y^2}} \log(1+x^2+y^2)\,dx\right)dy. \qquad \left(\frac{\pi}{4}\log 2 - \frac{\pi}{8}\right)$$

演習問題 8 終

微分積分学 B ・演習問題 9

(1996/12/4)　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

広義積分の計算.

[**1**] $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad D=\{(x,y)\ ;\ 0<x \leqq y \leqq 1\}.$

$\left(\text{Note}: \dfrac{\partial}{\partial x}\log(x+\sqrt{x^2+y^2}\,) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$　　$(\log(1+\sqrt{2}))$

[**2**] $b^2<ac,\ a>0$ とし，$Q(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ とおくとき，

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-Q(x,y)}}, \quad D=\{(x,y)\ ;\ Q(x,y)<1\}.$$

（Hint：平方完成してみよ.）　　$\left(\dfrac{2\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\right)$

[**3**] $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} (x-y)^2\, e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy.$

（Hint：変数変換 $x+y=u,\ x-y=v.$）　　(π)

[**4**] $\displaystyle\iint_D \frac{\sin y}{\sqrt{(\pi-x)(x-y)}}\, dxdy, \quad D=\{(x,y)\ ;\ 0\leqq y<x<\pi\}.$

$\left(\text{Note}: a>0 \text{ のとき，} \dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{a}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$

（Hint：$D_\varepsilon=\{(x,y)\ ;\ 0\leqq y\leqq \pi-2\varepsilon,\ y+\varepsilon\leqq x\leqq \pi-\varepsilon\}$）　　(2π)

[**5**]（12 **月** 11 **日提出のレポート問題**）　$a>0$ は定数とする.

$$\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\, dxdy, \quad D=\{(x,y)\ ;\ x^2+y^2\geqq a^2\}.$$

$\left(4\pi\cdot\dfrac{1+\log a}{a}\right)$

演習問題 9 終

微分積分学 B・演習問題 10

(1996/12/11)　　　　　　　　（担当：野村隆昭）

Γ 函数.

[1] $\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^\alpha}\,dx = 1$ であることを示せ.

[2] a, b, p, q はすべて正数とするとき，$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}}{\{ax+b\,(1-x)\}^{p+q}}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{a^p\,b^q\,\Gamma(p+q)}$.

（Hint：変数変換 $x = \frac{1}{1+t}$.）

[3] x, y は実数で $x > |y|$ とするとき，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cosh 2yt}{(\cosh t)^{2x}}\,dt = 4^{x-1}\,\frac{\Gamma(x-y)\,\Gamma(x+y)}{\Gamma(2x)}$.

$\left(\text{Hint：積分を } \displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2yt}}{(\cosh t)^{2x}}\,dt \text{ として変数変換 } s = e^{2t}.\right)$

[4] $r > 0$ に対して，

$$B_n(r) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ ;\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqq r^2\} \qquad (n \text{ 次元の球})$$

とおき，その体積を $V_n(r)$ とする：$\displaystyle V_n(r) = \int\cdots\int_{B_n(r)} dx_1\ldots dx_n$. このとき

$$V_n(r) = 2rV_{n-1}(r)\int_0^1 \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{n-1} dt$$

という関係があることを示し，これより $\displaystyle V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}\,r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ であることを示せ.

[5] 変数変換 $x + y = u$, $y = uv$ を用いて，$p, q, r > 0$ のとき

$$\iint_D x^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}\,dxdy = \frac{\Gamma(p+q+r)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\,\Gamma(r)}.$$

ただし，$D = \{(x, y)\ ;\ x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\}$.

[6]（12 **月** 18 **日提出のレポート問題**）　$\alpha > 0$, $\beta > 0$ は定数とする.

$$\int_0^1 \frac{t^{\beta-1}}{\sqrt{1-t^\alpha}}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{2}\right)}.$$

演習問題 10 終