微分積分学B・試験問題

（1997年1月8日（水）実施）　$\boxed{\mathbf{13:00 \sim 15:30}}$　（担当：野村隆昭）

---

[1]　方程式 $z = x + y\sin z$ は $(x, y, z) = (a, 0, a)$（a は定数）の近傍で陰函数 $z = f(x, y)$ を定め，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \sin z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$ となることを示せ．

[2]　$\mathbb{R}^2$ 上の函数 $f(x, y) = x^2 + (1+x)^3 y^2$ の臨界点（停留点）は $(x, y) = (0, 0)$ のみで，それは極小点であることを示せ．　また $f(0, 0)$ は最小値ではないことも示せ．

[3]　$a > 0$ は定数とする．　次の定積分を計算せよ．

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy, \qquad D = \{(x, y)\ ;\ ax \leqq x^2 + y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}.$$

[4]　$\displaystyle\lim_{\alpha \to \infty} \int_0^\infty e^{-x^\alpha}\, dx = 1$ であることを示せ．

[5]　次の函数は $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 級であることを示せ：

$$f(x, y) := \begin{cases} (x+y)^3 \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

以上