平成８年度 解析学特論 I（学部） 函数解析学（大学院） レポート問題

出題：1996年7月18日　（担当：野村隆昭）

A4 レポート用紙にて数学教室事務室に提出

提出期限：1996年9月20日（金）**厳守**

［**1**］ 位相群 $GL(n,\mathbb{R})$ の左 Haar 測度は $\dfrac{dx}{|\det x|^n}$ と表されることを示せ．ただし dx は $n\times n$ 実行列全体を $\mathbb{R}^{n\times n}$ と自然に同一視したときの Lebesgue 測度を表す．

またこの左 Haar 測度は右 Haar 測度でもあることを示せ．

［**2**］ 上半三角行列のなす位相群

$$S := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{\huge 0} & & & x_{nn} \end{pmatrix} \in GL(n,\mathbb{R}) \right\}$$

の左 Haar 測度 $d_l x$ と右 Haar 測度 $d_r x$ はそれぞれ

$$d_l x = \frac{1}{|x_{11}^n x_{22}^{n-1}\cdots x_{nn}|}\prod_{i\leqq j} dx_{ij}, \qquad d_r x = \frac{1}{|x_{11}x_{22}^2\cdots x_{nn}^n|}\prod_{i\leqq j} dx_{ij}$$

で与えられることを示せ．

［**3**］ G はコンパクト群であるとする．G の既約ユニタリ表現 π の指標を ξ_π で表す．すなわち π の表現空間 H_π は有限次元であることに注意して，$\xi_\pi(x) := \operatorname{tr}\pi(x)$．

(1) $\displaystyle\int_G \xi_\pi(xgyg^{-1})\,dg = \frac{\xi_\pi(x)\xi_\pi(y)}{\dim H_\pi}$ を示せ（dg は正規化された G の Haar 測度）．

(2) 逆に G 上の連続函数 f（$f(e)\neq 0$；e は単位元）がすべての $x, y\in G$ について

$$(*) \qquad \int_G f(xgyg^{-1})\,dg = f(x)f(y)$$

をみたすとき，G のある既約ユニタリ表現 π に対して $f = \dfrac{\xi_\pi}{\dim H_\pi}$ となることを示せ．

（Hint：$\iiint \overline{\xi_{\pi_1}(x)}\,\overline{\xi_{\pi_2}(y)} f(xgyg^{-1})\,dxdydg$ を２通りに計算する ― $(*)$を用いる方法と測度の不変性を用いる方法．函数 f が central（類函数）であることにも注意．）

以上