平成７年度　数学解析 III　試験問題

（担当：野村隆昭）

1995 年 9 月 21 日実施　　時間 $\boxed{\mathbf{9{:}30 \sim 12{:}00}}$

⋆ [**1**] から [**4**] の全問に解答せよ.
⋆ 問題は **用紙の両面** にある.
⋆ 解答用紙は **片面のみ** を使用のこと.
⋆ １枚の解答用紙に２問（例えば [**3**], [**4**]）の解答を混在させぬこと.
⋆ 先行する小問の結果は（解けなくても）自由に用いてよい.

[**1**]　$t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ を固定する. 開区間 $(-\pi, \pi)$ で e^{itx} に等しい周期函数 $f(x)$ に Fourier 級数論における Parseval の等式を適用して，次の等式を示せ：

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-n)^2}.$$

$\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が $L^2[-\pi,\pi]$ で完全直交系をなすことは証明なしに使ってよい.

[**2**]　$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ とおく.

(1) $a > 0$ のとき，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\|x\|^2} e^{-i\xi\cdot x}\,dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-\|\xi\|^2/4a}$　$(\xi \in \mathbb{R}^n)$　を示せ.

(2) $t \geqq 0$ のとき，$\displaystyle e^{-t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ity}}{1+y^2}\,dy$ を示せ.

(3) $\displaystyle\frac{1}{1+y^2} = \int_0^\infty e^{-(1+y^2)u}\,du$ を (2) に代入して，$t \geqq 0$ のとき，次式を示せ：

$$e^{-t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, e^{-t^2/4u}\,du.$$

注意： Fubini の定理適用の正当化は当然要求されている（次の (4) でも）.

(4) (3) の等式を $e^{-\|x\|} = \cdots$ と読んで代入し，次いで (1) を適用することにより，

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|} e^{-i\xi\cdot x}\,dx = 2^n \pi^{(n-1)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(\|\xi\|^2+1\right)^{(n+1)/2}} \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

を示せ. ただし，Γ は gamma 函数 $\displaystyle\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-u}u^{t-1}\,du$　$(t > 0)$　である.

裏面に続く

[**3**] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする．X 上の函数 f, f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ は $\mathcal{B}$-可測であるとし，次を仮定する：

> 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\mu(E) < \varepsilon$ である $E \in \mathcal{B}$ が存在して，E の補集合 E^c 上で函数列 $\{f_n\}$ は f に一様収束している．

(1) 次の命題は成り立つか．成り立つならば証明を与え，成り立たないならば反例をあげよ：

> 「ある零集合 $N \in \mathcal{B}$ の補集合 N^c 上で $\{f_n\}$ は f に一様収束している.」

(2) $\{f_n\}$ は f に測度収束していることを示せ.

(3) ある $g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, $g \geqq 0$ が存在して，$|f_n(x)| \leqq g(x)$ がすべての n と $x \in X$ に対して成り立っているとする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$ が成り立つことを示せ（**注意：** (2) の応用問題としての出題ではない）．

[**4**] 函数 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して，$\displaystyle f * g(x) := \int f(x-y) g(y) \, dy$ とおく（f と g のたたみ込み）．下の $(*)$ は，「すべての $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して $f * \phi = f$ となるような $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ は存在しない」ことの一つの証明の概略を述べたものである．この証明の詳細を完成せよ．ただし B_r $(r > 0)$ は原点を中心とする半径 r の開球であり，χ_E は集合 E の定義函数である．

$(*)$ そのような $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ が存在するならば，各 $r > 0$ に対して $\chi_{B_r} * \phi(x_r) = 1$ となる $x_r \in B_r$ が存在する．このとき，

$$\int_{B_{2r}} |\phi(y)| \, dy \geqq 1 \qquad (\forall r > 0)$$

を得るが，$\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であるからそのようなことは起こらない．∎

以上