平成６年度　数学解析 II　**（２回生）　試験問題**　　（担当：野村隆昭）

1995 年 1 月 26 日実施　　時間 $\boxed{\textbf{16:50 〜 18:20}}$

⋆ [**1**] と [**2**] は必ず解答し, [**3-a**], [**3-b**] は **どちらか一方のみ** に解答のこと.
⋆ 問題は **用紙の両面** にある.
⋆ 解答用紙は **片面のみ** を使用のこと.
⋆ 先行する小問の結果は（解けなくても）自由に用いてよい.

[**1**]　集合 X の部分集合の列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して

$$\limsup_{k\to\infty} A_k := \bigcap_{j=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k\Big), \qquad \liminf_{k\to\infty} A_k := \bigcup_{j=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k\Big)$$

とおく．そして $\limsup_{k\to\infty} A_k = \liminf_{k\to\infty} A_k$ のとき，集合列 $\{A_k\}$ は収束するといい，その等しい集合を $\lim_{k\to\infty} A_k$ で表す.

(1) $\{A_k\}$ が単調ならば収束することを示せ．またその極限とは何か.
(2) 相異なる任意の i, j に対して $A_i \cap A_j = \phi$ であるとき，$\{A_k\}$ は収束するか.
(3) 部分集合 E の定義函数を χ_E で表す．$A := \lim_{k\to\infty} A_k$ が存在するとき，各点 $x \in X$ において $\lim_{k\to\infty} \chi_{A_k}(x)$ も存在して $\chi_A(x)$ に等しいことを示せ.
(4) $(X, \mathcal{B}, \mu)$ が測度空間であり，各 A_k が $\mathcal{B}$ に属するとする．$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) < \infty$ で $A := \lim_{k\to\infty} A_k$ が存在するならば，$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$ も存在して $\mu(A)$ に等しいことを示せ.
(5) (4) において，仮定 $\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) < \infty$ を取り除くとどうなるか.

[**2**]　$\dfrac{\sin x}{x}$ を x の冪級数に展開してから項別積分をすることにより，$s > 1$ のとき次の等式が成り立つことを示せ：

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\,\frac{\sin x}{x}\,dx = \mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{s}\Big).$$

（Hint：$\mathrm{Arctan}\, t$ の冪級数展開は，知らなくても $\displaystyle\int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$ の項別積分から得られる ⋯⋯ $\dfrac{1}{1+x^2}$ を等比級数の和と見よ.）

裏面に続く

次の [**3-a**] と [**3-b**] はどちらか 一方のみ を選択のこと.

[**3-a**]　函数 $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$ を考える.

(1) f は $E := (0,a)\times(0,\infty)$ $(0 < a < \infty)$ 上で Lebesgue 可積分であることを示せ.

(2) 次の等式を示せ $(0 < a < \infty)$:

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \cos a \int_0^\infty \frac{e^{-ay}}{1+y^2}\,dy - \sin a \int_0^\infty \frac{ye^{-ay}}{1+y^2}\,dy.$$

(3) (2) より $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ を示せ（優収束定理に固執する必要はない）.

[**3-b**]　函数 $\displaystyle f(x) := \int_0^\infty \frac{1-e^{-|x|t^2}}{t^2}\,dt$ を考える.

(1) $f(x)$ はすべての実数 x で定義されて連続であることを示せ.

(2) $f(x)$ は $x \neq 0$ で微分可能であって，$x > 0$ のとき $\displaystyle f'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ であることを示せ.

(3) $f(x)$ を求めよ.

以上