平成６年度　数学解析I　（２回生）　試験問題　　（担当：野村隆昭）

1994年9月13日実施　　時間 $\boxed{\textbf{16:50 〜 18:20}}$

⋆ [**1**] ～ [**4**] の内 **３題以上** を解答せよ．問題は **用紙の両面** にある．
⋆ 解答用紙は **片面のみ** を使用のこと．
⋆ 先行する小問の結果は（解けなくても）自由に用いてよい．

[**1**] n 次実正方行列の全体を $M(n,\mathbb{R})$ で表す．明らかに $M(n,\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^{n\times n}$ と同一視される．

(1) この同一視における $X \in M(n,\mathbb{R})$ のユークリッド・ノルムは $\sqrt{\mathrm{tr}({}^tXX)}$ に等しいことを示せ．ただし ${}^tX$ は X の転置行列，$\mathrm{tr}(X)$ は X のトレースである．

(2) $M(n,\mathbb{R})$ に属する行列で正則なものの全体を $GL(n,\mathbb{R})$ で表す．$GL(n,\mathbb{R})$ は $M(n,\mathbb{R})$ の開集合であることを示せ．

(3) $GL(n,\mathbb{R})$ 上の行列値函数 $f(X) := X^{-1}$ の微分 $f'(X)$ はどのような線型写像か．

[**2**] (1) $|t| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ をみたす実数 t を固定するとき，方程式 $\sin(tx) + \cos(tx) = x$ は実数解をただ一つ持つことを示せ．

(2) (1) にいう解を $\varphi(t)$ で表すとき，$\varphi(t) = 1 + t + \dfrac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ $(t \to 0)$ を示せ．

[**3**] 閉区間 $[0,1]$ 上で連続な複素数値函数の全体を $C[0,1]$ で表し，各 $f \in C[0,1]$ に対して $\|f\| := \sup_{0\leqq t\leqq 1} |f(t)|$ とおく．

(1) $\|\cdot\|$ は $C[0,1]$ にノルムを定義することを示せ．

(2) このノルムで $C[0,1]$ は Banach 空間（すなわち，完備なノルム空間）になっていることを示せ．

裏面に続く

[**4**]　$\mathbb{R}^n$ の原点を中心とする半径 r の閉球を $B_n(r)$ で表し，$B_n(r)$ の体積（容積）を $V_n(r)$ で表す.

(1) $\displaystyle\int_{B_n(r)} dx$ を $\displaystyle\int_{-r}^{r} dx_n \int_{B_{n-1}(\sqrt{r^2-x_n^2})} dx_1 \cdots dx_{n-1}$ とすることにより次の関係式を示せ：

$$V_n(r) = 2\,r\,V_{n-1}(r) \int_0^{\pi/2} \cos^n\theta\,d\theta.$$

(2) $a_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n\theta\,d\theta$　$(n = 0, 1, 2, \ldots)$ とおく.　数列 $\{a_n\}$ は単調減少である $(a_n \geqq a_{n+1}\ \ (\forall n))$ ことを示せ.　また，関係式 $a_n = \dfrac{n-1}{n}\,a_{n-2}$　$(n = 2, 3, \ldots)$ も導け.

(3) $r = 1$ のとき，n の函数とみた $V_n(1)$ が最大になるのはいつか.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n(1)$ を求めよ.

（**注意**：本問では，一般の n に対して $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n\theta\,d\theta$ や $V_n(r)$ の値を求めることは要求されていない.）

以上