平成５年度　函数解析　試験問題　　（担当：野村隆昭）

1994 年 2 月 14 日実施　　時間 **9:30〜12:30**

⋆ [**1**] 〜 [**3**] のすべてに解答せよ. **問題は用紙の両面**にある.
⋆ 解答用紙は片面のみを使用のこと.
⋆ １枚の解答用紙に２問（例えば, [**1**], [**2**]）の解答を混在させぬこと.
⋆ 先行する小問の結果は（解けなくても）自由に用いてよい.

[**1**]　エルミート内積 $(\cdot\,|\,\cdot)$ を持つ複素 Hilbert 空間 H の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x \in H$ に弱収束しているものとする. 次の (1), (2), (3) を示せ. ただし, (1) 〜 (3) は独立の問題で, $\|x\| := \sqrt{(x\,|\,x)}$ である.

(1)　$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leqq \|x\|$ ならば, $x_n \to x$ (in norm) である.

(2)　H 上の任意の有界線型作用素 T に対して, $\{Tx_n\}$ は Tx に弱収束する.

(3)　ノルム位相に関する閉部分空間 M があって, $x_n \in M$ $(n = 1, 2, \dots)$ ならば $x \in M$ である.

[**2**] (1)　Banach 空間 $L^1(\mathbb{R}^n)$ において, たたみ込み $f*g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$ が定義できて, すべての $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$f*g = g*f, \qquad (f*g)*h = f*(g*h),$$
$$\|f*g\|_1 \leqq \|f\|_1\|g\|_1 \qquad (\|\cdot\|_1 \text{ は } L^1\text{-norm})$$

をみたすことを示せ.

(2)　中心が原点で半径が $\dfrac{1}{k}$ である $\mathbb{R}^n$の閉球を B_k $(k = 1, 2, \dots)$ で表し, その Lebesgue 測度を $m(B_k)$ とする（本問では $m(B_k)$ を求めることは要求されていない）. 函数 $g_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ を $g_k := \dfrac{1}{m(B_k)}\chi_{B_k}$ （ただし, χ_{B_k} は B_k の定義函数）で定義すると, 任意の $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して, $\lim_{k\to\infty} f*g_k = f$ (in $L^1(\mathbb{R}^n)$) が成立することを示せ.

(3)　たたみ込みを積とする Banach 代数 $L^1(\mathbb{R}^n)$ は単位元を持たないことを (2) を用いて示せ.

裏面に続く

[**3**]　Hilbert 空間 $H = L^2[0,1]$ で考える. 内積は $(f \mid g) := \displaystyle\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$ で, ノルムは $\|f\| := \sqrt{(f \mid f)}$ である.

(1)　各 $f \in H$ に対して, 積分 $\displaystyle\int_0^t f(s)\,ds$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ は意味を持ち, 次の不等式が成り立っていることを示せ : $\left|\displaystyle\int_0^t f(s)\,ds\right| \leqq \sqrt{t}\,\|f\|.$

(2)　等式 $Tf(t) := \displaystyle\int_0^t f(s)\,ds$ によって H 上の有界線型作用素 T が定義できて, $\|T\| \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ.

(3)　作用素 T は compact であることを示せ.
（Hint : 作用素 T による H の有界列の像が, 同等連続で一様有界な函数からなることを示す. あるいは T が Hilbert-Schmidt 作用素であることを示してもよい.）

(4)　作用素 T の共役作用素 T^* を求めよ. さらに, 作用素 TT^* は

$$TT^*f(t) = \int_0^1 \min(t,s) f(s)\,ds$$

と表されることを示せ.

(5)　作用素 TT^* の固有値はすべて正であることを示せ. また, それらの固有値及び対応する固有函数でノルムが 1 のものを求めよ.
（ある 2 階の常微分方程式を境界条件 $f(0) = f'(1) = 0$ で解くことになる.）

(6)　$\|T\| = \dfrac{2}{\pi}$ であることを示せ（Remark : $\dfrac{2}{\pi} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ）.

以上