特別講義 I　レポート問題　　　　　　　　　　　　　　　　　**（野村 隆昭）**

内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を持つ実ベクトル空間 W と，e を基底とする 1 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}e$ との直和ベクトル空間 $V=\mathbb{R}e\oplus W$ を考え，積を

$$(\alpha e+w)(\beta e+u)=(\alpha\beta+\langle w,u\rangle)e+(\alpha u+\beta w)\qquad(\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ w,u\in W)$$

で定義する．

(1) V は Jordan 代数になることを示せ．
（$x=\alpha e+w$ とすると $x^2=2\alpha x+(\langle w,w\rangle-\alpha^2)e$ となる）

(2) この Jordan 代数 V でのべき等元（idempotent）は次の二種であることを示せ．

(i) 単位元である e，または零元．

(ii) $\frac{1}{2}e+w$　(ただし $w\in W$で $\langle w,w\rangle=\frac{1}{4}$)

（連立方程式 $\begin{cases}\alpha^2+\langle w,w\rangle=\alpha\\ 2\alpha w=w\end{cases}$ を解く）

(3) べき等元 $c:=\frac{1}{2}e+w$ (ただし $w\in W$で $\langle w,w\rangle=\frac{1}{4}$) に関する V の Peirce 空間 $V_k(c)$ $(k=0,\frac{1}{2},1)$ は次のようになることを示せ．

$$V_0(c)=\mathbb{R}(e-2w),\quad V_{\frac{1}{2}}(c)=\{u\in W;\langle u,w\rangle=0\},$$
$$V_1(c)=\mathbb{R}(e+2w).$$

(4) $\dim W\geqq 2$ のとき V は単純（イデアルは $\{0\}$ と V のみ）であることを示せ．また，$W=\mathbb{R}$ のとき，V はイデアルの直和として，$V=\mathbb{R}(e+1)\oplus\mathbb{R}(e-1)$ と表わされることを示せ．