平成４年度　函数解析　試験問題

（担当：野村隆昭）

1993 年 2 月 15 日実施　　時間 **9:30〜12:30**

⋆ [**1**] 〜 [**3**] のすべてに解答せよ. **問題は用紙の両面**にある.

⋆ 解答用紙は片面のみを使用のこと.

⋆ １枚の解答用紙に２問（例えば, [**1**], [**2**] ）の解答を混在させぬこと.

[**1**]　エルミート内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を持つ無限次元の複素 Hilbert 空間を H とし, その内積から定まるノルムを $\| \cdot \|$ で表す. 次の各命題が正しければ証明または根拠となる定理をあげ, 誤りであればその理由を述べよ.

(1)　$x_n, y_n \in H$ $(n = 1, 2, \dots)$ とする. すべての n に対して, $\|x_n\| \leqq 1$, $\|y_n\| \leqq 1$ であり, かつ $\lim_{n\to\infty} \langle x_n \,|\, y_n \rangle = 1$ が成り立つならば, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ である.

(2)　H の有界閉集合は, ノルム $\| \cdot \|$ で定まる位相に関してコンパクトである.

(3)　H の単位球面 $\{ x \in H \,;\, \|x\| = 1 \}$ は弱位相でも閉集合である.

(4)　H 全体で定義された有界線型作用素 $T : H \to H$ が全単射ならば, 逆作用素 T^{-1} も有界である.

[**2**]　閉区間 $[-1, 1]$ で連続な複素数値函数の全体がなすベクトル空間に sup-norm $\|f\| := \sup_{-1 \leqq t \leqq 1} |f(t)|$ を入れたノルム空間を $C[-1, 1]$ で表す.

(1)　$C[-1, 1]$ は Banach 空間であることを示せ.

(2)　次式によって $C[-1, 1]$ 上の有界線型作用素 T が定まり, $\|T\| = 2$ となることを示せ：

$$Tf(s) := \int_{-1}^{s} f(t)\, dt \qquad (f \in C[-1, 1],\ -1 \leqq s \leqq 1).$$

(3)　$\|T^n\| = \dfrac{2^n}{n!}$ $(n = 1, 2, \dots)$ を示せ（$|T^n f(s)|$ を帰納的に評価する).
これより, 作用素 T のスペクトルについて何がいえるか.

(4)　作用素 T はコンパクトであることを示せ (Hint：Ascoli-Arzelà).

(5)　作用素 T による閉単位球 $B := \{ f \in C[-1, 1] \,;\, \|f\| \leqq 1 \}$ の像が閉集合でないことを, 次の函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を用いて示せ：

$$f_n(t) := \begin{cases} 0 & (-1 \leqq t \leqq 0), \\ nt & \left(0 < t \leqq \dfrac{1}{n}\right), \\ 1 & \left(\dfrac{1}{n} < t \leqq 1\right). \end{cases}$$

裏面に続く

[**3**]　正規直交基底 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ を持つ複素 Hilbert 空間を H とし, H のエルミート内積を $\langle\cdot|\cdot\rangle$ で表す. H の各元 x は, H で収束する級数によって

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n \qquad (x_n := \langle\, x \,|\, e_n \,\rangle \in \mathbb{C})$$

と表される. 本問では次式で定義される H 上の線型作用素 S, T を考える：

$$Sx := \sum_{n=1}^{\infty} x_{n-1} e_n, \qquad Tx := \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} e_n.$$

(1)　$\|S\| = \|T\| = 1$ を示せ. 共役作用素 S^*, T^* も求めよ.

(2)　作用素 $S+T$ は自己共役であること, 及び $\|S+T\| = 2$ であることを示せ.
(Hint：$\|S+T\| \geqq 2$ を示すには, $x_n = r^n$ $(0<r<1)$ のときを考えてみよ.)

(3)　作用素 $S+T$ は固有値を持たないことを示せ.
(Hint：$\lambda = 2\cos\theta$ が固有値であるとして矛盾を出す. 対応する固有ベクトル x として, $\sin\theta \neq 0$ のときは, $x_0 = \sin\theta$ となるものをとると都合がよい.)

(4)　$0<r<1$ である r と, $0<\varphi<\pi$ である φ に対して,

$$y := \sum_{n=0}^{\infty} [r^n \sin(n+1)\varphi]\, e_n$$

とおく. このとき, φ に無関係で $\lim_{r\to 1} M(r) = 0$ となる $M(r) > 0$ が存在して,

$$\|(S+T)y - 2(\cos\varphi)y\| \leqq M(r)\|y\|$$

が成り立つことを示せ.
(Remark：$M(r) = (1-r)\sqrt{2\left(1+\dfrac{1}{r^2}\right)}$ と取れるが, それ以外のものでも勿論構わない.)

(5)　作用素 $S+T$ のスペクトルを決定せよ.

以上