平成４年度　解析学特論 I　レポート問題　（担当：野村隆昭）

1992 年 10 月 16 日 (金) 締切　　提出先：数学教室事務室

[**1**], [**2**], [**3**] のすべてに解答せよ. 表紙を付けそこに入学年度, 系, 氏名, 学生番号を記入のこと.

[**1**] $\mathfrak{g}$ は２次元の非可換な実 Lie 代数とする.

(1) $\mathfrak{g}$ は $[e, f] = f$ となる基底 e, f を持つことを示せ.

(2) $\mathfrak{g}$ は可解で, しかも中心は $\{0\}$ であることを示せ.

(3) $\mathfrak{g}$ に同型な線型 Lie 代数を１つ見い出し, explicit に行列表示せよ.
(adjoint 表現を考えると . . .)

(4) $\mathfrak{g}$ の任意の derivation D に対して, $x \in \mathfrak{g}$ が存在して, $D = \operatorname{ad} x$ となることを示せ.

[**2**] Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の Killing 形式を B とする.

(1) $B(X, Y) = 2n \operatorname{tr}(XY) - 2 (\operatorname{tr} X)(\operatorname{tr} Y)$ であることを示せ.

(2) $\mathfrak{g} = \mathrm{Alt}(n, \mathbb{R}) + \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$, かつ $B(\mathrm{Alt}(n, \mathbb{R}),\ \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})) = \{0\}$ に注意して, 二次形式 $\mathfrak{g} \ni X \mapsto B(X, X)$ の (Sylvester の慣性律による) 符号数を求めよ. ただし, $\mathrm{Alt}(n, \mathbb{R}) = \{$ 交代行列 $\}$, $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) = \{$ 対称行列 $\}$.

(3) $\mathfrak{b} := \{ (x_{ij}) \in \mathfrak{g}\,;\, x_{ij} = 0 \quad \text{for } i > j \}$ とおく. $\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数をなすことを示せ. また, Killing 形式 B に関する $\mathfrak{b}$ の直交空間 $\mathfrak{b}^\perp$ を求めよ. ここで, $\mathfrak{b}^\perp := \{ X \in \mathfrak{g}\,;\, B(X, Y) = 0 \quad \text{for all } Y \in \mathfrak{b} \}$.

[**3**] Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ を考える.

(1) $\mathfrak{g}$ の基底 h, x, y で交換関係 $[h, x] = 2x, [h, y] = -2y, [x, y] = h$ をみたすものを１つ例示せよ.

(2) $\mathfrak{g}$ の ideal $\mathfrak{a}$ が (1) の h, x, y の内のどれか１つでも含めば, $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ となることに注意して, $\mathfrak{g}$ は simple であることを示せ.
($\alpha h + \beta x + \gamma y \in \mathfrak{a}$ に対して, $[[\alpha h + \beta x + \gamma y, x], x]$ 等を計算すると . . .)

(3) エルミート内積を持つ有限次元複素ベクトル空間を V とする. また, $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現であって, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して, 作用素 $\pi(X)$ は skew-Hermitian になるものとする. このとき表現 π は trivial, すなわち $\pi(X)$ はすべて零作用素であることを示せ.
(π が non-trivial なら, $\pi(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}$. この両辺の Killing 形式の符号数を比べよ.)

以上