平成３年度　解析学特論 III　レポート問題　　（担当：野村隆昭）

1992 年 2 月 14 日 (金) 締切　　提出先：数学教室事務室

[**1**], [**2**], [**3**] のすべてに解答せよ. 表紙を付けそこに入学年度, 系, 氏名, 学生番号を記入のこと.

[**1**] **記号**：　$n \geqq 3$ とし, $\mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{C}$ 係数 j 次斉次調和多項式の全体がなすベクトル空間を $\mathcal{HP}_j$ で表す. $e_n := {}^t(0, \ldots, 0, 1) \in S^{n-1}$ とする. $SO(n, \mathbb{R})$ は S^{n-1} に推移的に作用するが, その e_n における固定部分群を K とする. S^{n-1} 上の j 次 spherical harmonics の空間を $\mathcal{H}_j$ とし, $\mathcal{H}_j$ に属する函数で K-不変なもののなす部分空間を $\mathcal{H}_j^K$ とする. また, S^{n-1} 上の canonical な Borel 測度を σ_{n-1} で表し, $\omega_{n-1} := \sigma_{n-1}(S^{n-1})$ とおく.

(1) $p, q \in \mathcal{HP}_j$ とする. p, q の Fischer 内積 $\langle p \,|\, q \rangle_{\mathrm{F}} := p(D)\overline{q}$ と, p, q を S^{n-1} に制限して, $L^2(S^{n-1})$ でとった内積 $\langle p \,|\, q \rangle_2 := \displaystyle\int_{S^{n-1}} p(u)\overline{q(u)}\, d\sigma_{n-1}(u)$ との間に成立する関係式：

$$\langle p \,|\, q \rangle_{\mathrm{F}} = \frac{2^{j-1}}{\pi^{n/2}}\, \Gamma\left(\frac{n}{2} + j\right) \cdot \langle p \,|\, q \rangle_2$$

を次の手順で示せ (講義 Theorem 8.6 の別証)：

(a) 定義と部分積分によって, $\langle p \,|\, q \rangle_{\mathrm{F}} = \dfrac{(-1)^j}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \overline{q(x)}\, p(D)(e^{-\|x\|^2/2})\, dx$ を導く.

(b) $p(D)(e^{-\|x\|^2/2}) = \dfrac{(-i)^j}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|^2/2} p(y) e^{-ix\cdot y}\, dy$ において, Bochner-Hecke 等式を使う.

(c) 最後に積分を極座標へ変換する.

(2) j 次の超球多項式 (ultraspherical polynomial) $P_j^{(n-2)/2}(t)$ の積分表示

$$P_j^{(n-2)/2}(\cos\theta) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\dfrac{n-2}{2}\right)} \int_0^{\pi} (\cos\theta + i \sin\theta \cos\varphi)^j\, (\sin\varphi)^{n-3}\, d\varphi$$

を次の手順で示せ：

(a) $S^{n-2} \hookrightarrow (\mathbb{R}e_n)^{\perp}$ と埋め込んで,

$$p(x) := \frac{1}{\omega_{n-2}} \int_{S^{n-2}} (x \cdot e_n + i x \cdot v)^j\, d\sigma_{n-2}(v) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

を考えると, $p \in \mathcal{HP}_j$ であって, $p(kx) = p(x)$ $(k \in K, x \in \mathbb{R}^n)$ をみたす.

(b) $p|_{S^{n-1}} \in \mathcal{H}_j^K = \mathbb{C}(u \mapsto P_j^{(n-2)/2}(u \cdot e_n))$ と次の積分公式を用いる：

$$\int_{S^{n-2}} f(u \cdot e_{n-1})\, d\sigma_{n-2}(u) = \omega_{n-3} \int_0^{\pi} f(\cos\varphi)\, (\sin\varphi)^{n-3}\, d\varphi.$$

裏面に続く

[**2**] (1) 2つの行列 (実または複素) A, B に関する次の3つの命題は同値であることを示せ. ただし, $\exp A$ は行列 A の exponential である.

(a) $AB = BA$,

(b) $(\exp tA)(\exp tB) = (\exp tB)(\exp tA) \qquad \text{for all } t \in \mathbb{R}$,

(c) $(\exp tA)(\exp tB) = \exp t(A+B) \qquad \text{for all } t \in \mathbb{R}$.

(2) (1) の (b), (c) の代わりに次の (d), (e) を考える :

(d) $(\exp A)(\exp B) = (\exp B)(\exp A)$,

(e) $(\exp A)(\exp B) = \exp(A+B)$.

$A = \begin{pmatrix} \pi i & 0 \\ 0 & -\pi i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $(d) \not\Rightarrow (e)$ となる例を, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ただし, $\alpha \in \mathbb{C}$ は方程式 $e^z = z + 1$ の 0 でない solution の1つ) は $(e) \not\Rightarrow (d)$ となる例を与えていることを確かめよ.

(3) $A = \begin{pmatrix} \pi i & 0 \\ 0 & -\pi i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2\pi i \end{pmatrix}$ は, $AB \neq BA$ であるが, (d) も (e) も成り立っていることを確かめよ.

[**3**] $\mathfrak{g} := \{\, X \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})\,;\, \mathrm{tr} X = 0 \,\}$ とする.

(1) $X \in \mathfrak{g}$ のとき, $D(X) := \det X$ とおくと,

$$\exp X = \begin{cases} \left(\cosh \sqrt{-D(X)}\right) \cdot I + \dfrac{\sinh \sqrt{-D(X)}}{\sqrt{-D(X)}} \cdot X & \text{if } D(X) < 0, \\ I + X & \text{if } D(X) = 0, \\ \left(\cos \sqrt{D(X)}\right) \cdot I + \dfrac{\sin \sqrt{D(X)}}{\sqrt{D(X)}} \cdot X & \text{if } D(X) > 0 \end{cases}$$

となることを示せ. ただし, I は2次の単位行列である.

(2) $A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ が適当な $X \in \mathfrak{g}$ に対して $A = \exp X$ と書けるための必要十分条件は, 次の (a) または (b) が成り立つことである. これを示せ.

(a) $\det A = 1$ かつ $\mathrm{tr} A > -2$,

(b) $A = -I$.

以上