平成２年度　数学解析 II　試験問題

（担当：野村隆昭）

1991 年 1 月 24 日実施　　時間 $\boxed{\textbf{10:00〜13:00}}$

⋆ [1] ∼ [4] のすべてに解答せよ.　　⋆ 1 枚の解答用紙で 2 問にわたらぬこと.

---

[1] Hilbert 空間 H の n 個の元 $x_1, \ldots, x_n$ に対して, 次式を示せ:

$$\sum_{(\theta_1,\ldots,\theta_n)\in\{-1,1\}^n} \|\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_n x_n\|^2 = 2^n \left(\|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2\right).$$

[2] $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$に対して, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ とおく.

(1) $a > 0$ のとき, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\|x\|^2} e^{-i\xi\cdot x}\,dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-\|\xi\|^2/4a}$　$(\xi \in \mathbb{R}^n)$　を示せ.

(2) $t \geqq 0$ のとき, $\displaystyle e^{-t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ity}}{1+y^2}\,dy$ を示せ.

(3) $\displaystyle\frac{1}{1+y^2} = \int_0^\infty e^{-(1+y^2)u}\,du$ を (2) に代入して, $t \geqq 0$ のとき, 次式を示せ:

$$e^{-t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, e^{-t^2/4u}\,du.$$

(4) 以上より, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|} e^{-i\xi\cdot x}\,dx = 2^n \pi^{(n-1)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(\|\xi\|^2+1\right)^{(n+1)/2}}$　$(\xi \in \mathbb{R}^n)$　を示せ. ただし, Γ は gamma 函数 $\displaystyle\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-u} u^{t-1}\,du$　$(t > 0)$　である.

[3] f は $\mathbb{R}^n$上の Lebesgue 可測函数で, $f \in L^1$ とする. また, $\widehat{f}$ は f の Fourier 変換 $\displaystyle\widehat{f}(\xi) := \int f(x) e^{-i\xi\cdot x}\,dx$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$ を表すものとする.

(1) $f_1 := f$, $\displaystyle f_k(x) := \int f(x-y) f_{k-1}(y)\,dy$ $(k = 2, 3, \ldots)$ とするとき, 各 k について, $f_k(x)$ は a.e.$x \in \mathbb{R}^n$で存在して, $f_k \in L^1$ であり, さらに $\|f_k\|_1 \leqq \|f\|_1^k$, $\widehat{f_k}(\xi) = \widehat{f}(\xi)^k$ $(\forall\xi \in \mathbb{R}^n)$ となることを示せ. ただし, $\|\cdot\|_1$ は L^1-norm である.

(2) $\varphi(0) = 0$ である $\mathbb{C}$ 上の整函数 (entire function) φ に対して, $\varphi \circ \widehat{f} = \widehat{g}$ となる $g \in L^1$ が存在することを示せ.

[4] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Lebesgue 可測函数とする. $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して, 零集合 N_x が存在して, $\forall y \notin N_x$ について, $f(y+x) = f(y)$ が成り立つと仮定する. このとき, 定数 c が存在して, $f(x) = c$ (a.e.x) となることを示せ (f が局所可積分なら...).

以上