平成２年度　数学解析 I　試験問題　（担当：野村隆昭）

1990 年 10 月 11 日実施　　時間 10:00〜13:00

⋆ [1] ～ [4] のすべてに解答せよ．　⋆ 1 枚の解答用紙で 2 問にわたらぬこと．

---

[1] (X, d) を距離空間とし, K は X の compact な部分集合とする．連続写像 $T : X \to K$ が次の性質 $(*)$ を持つならば, T は不動点を持つ, すなわち, $T(x) = x$ となる $x \in X$ が存在することを示せ．

$(*)$ 任意の自然数 n に対して, $d(T(x_n), x_n) < \dfrac{1}{n}$ となる $x_n \in X$ が存在する．

[2] X は非可算集合とし, X の部分集合 E で, E または E の補集合 E^c が高々可算集合であるようなものの全体を $\mathcal{B}$ とする．

(1) $\mathcal{B}$ は σ-algebra をなすことを示せ．

(2) 各 $E \in \mathcal{B}$ に対して, $\mu(E) = \begin{cases} 0 & (E \text{ が可算のとき}) \\ 1 & (E \text{ が非可算のとき}) \end{cases}$ とおくと, μ は測度になることを示せ．

(3) X 上の $\mathcal{B}$-可測な実数値函数 f に対して, X の高々可算な部分集合 E が存在して, E^c 上で f は定数になることを示せ．

[3] Lebesgue 可測な $\mathbb{R}$ の部分集合の全体を $\mathcal{L}$, $\mathbb{R}$ 上の (通常の) Lebesgue 測度を m とし, 測度空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ で考える．以下の各命題が正しければ証明を与え, 誤りであれば反例をあげよ．なお, $\mathbb{R}$ の位相は通常のものとし, また, 必要なら Lebesgue 非可測集合の存在は証明なしに認めてもよい．

(1) $E \in \mathcal{L}$ かつ $m(E) = 0$ ならば, E は高々可算集合である．

(2) 函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が, $\mathcal{L}$-可測函数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とほとんどいたる所等しいならば, f は $\mathcal{L}$-可測である．

(3) A は任意濃度の添字集合とする．各 $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(\alpha \in A)$ が $\mathcal{L}$-可測ならば, $\sup_{\alpha \in A} f_\alpha$ も $\mathcal{L}$-可測である．

(4) 函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の不連続点全体のなす集合の Lebesgue 測度が 0 であるための必要十分条件は, f がある連続函数とほとんどいたる所等しいことである．

[4] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は, $\mu(X) < \infty$ であるような測度空間とする．X 上の, $\mathcal{B}$-可測で μ-可積分な実数値函数 f に対して, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_X \log(1 + e^{n|f(x)|})\, d\mu(x)$ を求めよ．

以上