平成元年度 数学解析 II 試験問題

（担当：野村隆昭）

1990 年 2 月 1 日実施　　時間 $\boxed{\textbf{10:00}\sim\textbf{13:00}}$

- ⋆ [**1**] ∼ [**4**] のすべてに解答せよ.
- ⋆ 1 枚の解答用紙で 2 問にわたらぬこと.
- ⋆ 答案提出時に必要事項を記入した履修カードを添えること（科目番号は **3106**）.

[**1**] H は内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を持つ複素 Hilbert 空間で, $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ とおく.

(1) $x, y \in H$ で $\|x\| = 1$ のとき, $\displaystyle\lim_{\mathbb{R}\ni t\to 0} \frac{\|x+ty\|-1}{t}$ を求めよ.

(2) (1) での極限値への収束は, $\|x\| = 1$, $\|y\| \leqq 1$ であるような $x, y \in H$ について一様であることを示せ.

[**2**] f, g は $\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 可測函数で, $f \in L^1$, $g \in L^2$ とする. このとき, convolution $\displaystyle f * g(x) := \int f(x-y)g(y)\,dy$ は a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ で定義されて, $f * g \in L^2$ となることを示せ. ただし, 函数 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto f(x-y)$ の可測性は証明なしに認めてもよい.

[**3**] 函数 $\displaystyle f(x) := \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-t+ixt}\,dt \quad (x \in \mathbb{R})$ を考える（i は虚数単位）.

(1) $f(0)$ を求めよ.

(2) f はいたる所微分可能であって, $\displaystyle f'(x) = -\frac{1}{2(x+i)}\, f(x)$ となることを示せ.

(3) $(x+i)f(x)^2$ は x に無関係な定数であることを示し, それより $f(x)$ を求めよ.

[**4**] $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ で定義された函数 $\displaystyle f(x, y) := \frac{1}{x+iy}$ を考える（i は虚数単位）.

(1) f は $\mathbb{R}^2$ 上局所可積分な函数であることを示せ.

(2) $\displaystyle \overline{\partial} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)$ とおくとき, distribution としての等式 $\overline{\partial} f = \pi\delta$ を示せ. ただし, δ は原点 $(0,0)$ における Dirac 測度である（極座標を用いてみよ）.

以上