得点 [1]	得点 [2]	得点 [3]	得点 [4]	得点 [5]	合計点	整理番号

解 析 学 I：期 末 試 験

1 枚 目（4 枚あります）　　2017 年 7 月 31 日出題　13:00〜15:00

学生番号　　　　　　　　　　氏名

【注意】Lebesgue 積分論の試験であるので，優収束定理等，基本的な定理を用いる際の条件をきちんと確かめていない場合，あるいは間違っている場合，大幅に減点をする（零点もあり得る）.

得点 [1]

[1] $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を m とし，$f(x) := \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \dfrac{1}{[\,x\,]!} & (x \geqq 0) \end{cases}$ とする.

ただし，$[\,x\,]$ はガウス記号で，x を越えない最大の整数を表す. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\,dm$ を求めよ.

得点 [2]

[2] 測度空間 $(X, \mathscr{B}, \mu)$ で考え，函数 $f : X \to \mathbb{R}$ は X 上 μ 可積分であるとする.

(1) 各 $t \in \mathbb{R}$ を固定するとき，函数 $X \ni x \mapsto \sin(tf(x))$ は X 上 μ 可積分であることを示せ.

(2) $F(t) := \displaystyle\int_X \sin(tf(x))\,d\mu(x)$ $(t \in \mathbb{R})$ とおくとき，$F'(t) = \displaystyle\int_X f(x)\cos(tf(x))\,d\mu(x)$ であることを示せ.

解 析 学 I： 期 末 試 験

2 枚 目（4 枚あります） 2017 年 7 月 31 日出題　13:00〜15:00

氏名

得点 [3]

[3] 測度空間 $(X, \mathscr{B}, \mu)$ で考え函数 $f : X \to \mathbb{R}$ は X 上 μ 可積分であるとする．次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} n \int_X \log\Big(1 + \frac{|\,f(x)\,|}{n}\Big)\, d\mu(x).$$

解 析 学 I： 期 末 試 験

３ 枚 目（4 枚あります） 2017 年 7 月 31 日出題　13:00〜15:00

氏名

得点 [4]

[4] $a > 0$ とし，$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ における積分は Lebesgue 測度に関するものとする．
函数 $f(x,y) := e^{-axy}\sin x$ を $E := [\,0,\,+\infty\,) \times [\,1,\,+\infty\,)$ を考えることで次の公式を導け．

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,\frac{\sin x}{x}\,dx = \operatorname{Arctan}\frac{1}{a}.$$

解 析 学 I： 期 末 試 験

4 枚 目（最後のページです） 2017 年 7 月 31 日出題　13:00〜15:00

氏名

得点 [5]

[5] 測度空間 $(X, \mathscr{B}, \mu)$ で考え，函数 $f : X \to [-\infty, +\infty]$ は X 上 μ 可積分であるとする．

(1) a.e.$x \in X$ に対して $f(x) \in \mathbb{R}$ であることを示せ．

(2) $n = 1, 2, \ldots$ に対して，$E_n := \left\{ x \in X \ ; \ \dfrac{1}{n} \leqq |f(x)| \leqq n \right\}$ とおく．
$n \to \infty$ のとき，$\chi_{E_n}(x) f(x) \to f(x)$ (a.e.$x \in X$) であることを示せ．

(3) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \int_{E_n} |f| \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu$ であることを示せ．

(4) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次をみたす $A \in \mathscr{B}$ が存在することを示せ．

$$\mu(A) < +\infty, \quad \sup_{x \in A} |f(x)| < +\infty, \quad \int_{A^c} |f| \, d\mu < \varepsilon.$$