得点 [1]	得点 [2]	得点 [3]	得点 [4]	得点 [5]	合計点

整理番号

解析学 I：期末試験

1 枚目（4 枚あります） 2016 年 8 月 8 日出題　13:00〜15:00

学生番号　　　　　　　　　　　　氏名

【注意】 Lebesgue 積分論の試験であるので，優収束定理等，基本的な定理を用いる際の条件をきちんと確かめていない場合，あるいは間違っている場合，大幅に減点をする（零点もあり得る）．

得点 [1]

[1] m を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度とする．
$\mathbb{R}$ 上の m可積分な函数の列 $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, $\{h_n\}$ で，$n \to \infty$ のとき，$\mathbb{R}$ において一様に，

$$f_n(x) \to 0, \qquad g_n(x) \to 0, \qquad h_n(x) \to 0$$

であり，なおかつ次の性質を持つものを見出せ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = +\infty$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n \, dm = 1$.

(3) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n \, dm = 1$ かつ $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n \, dm = -1$.

解 析 学 I： 期 末 試 験

2 枚 目（4 枚あります） 2016 年 8 月 8 日出題　13:00〜15:00

氏名

得点 [2]

[2] 函数 $f(x,y) := xe^{-x^2(1+y^2)}$ を $[\,0,\,+\infty\,) \times [\,0,\,+\infty\,)$ 上で積分することにより，$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ を求めよ．

解 析 学 I： 期 末 試 験

3 枚 目（4 枚あります）　　2016 年 8 月 8 日出題　13:00〜15:00

氏名

得点 [3]

[**3**] 優収束定理を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\pi x)}{1+x^n}\,dx$ を求めよ．

得点 [4]

[**4**] $\alpha>1$ のとき，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}\,dx=\Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ を示せ．ただし，Γ はガンマ函数である．

【ヒント】 $\displaystyle\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ と変形してみよ．

解 析 学 I： 期 末 試 験

4 枚 目（最後のページです） 2016 年 8 月 8 日出題　13:00〜15:00

氏名

得点 [5]

[5] 函数 $F(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-|x|t^2}}{t^2}\,dt$ を考える．

(1) $F(x)$ はすべての $x \in \mathbb{R}$ において定義されることを示せ．また，$x=0$ で連続であることも示せ．

(2) $F(x)$ は $x>0$ で微分可能であることを示し，$F'(x)$ を積分記号を用いずに表せ．

(3) $F(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ を求めよ．