得点 [1]	得点 [2]	得点 [3]	得点 [4]	得点 [5]	得点 [6]	合計点	整理番号

解 析 学 I：中 間 試 験

1 枚 目（4 枚あります）　　2016 年 6 月 20 日出題　13:00〜15:00

学生番号　　　　　　氏名

得点 [1]

[1] X を集合とし，X の部分集合 $A_1, A_2, \ldots$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\Big), \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n\Big)$$

とおく．以下の各問いに答えよ．

(1) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in X\ ;$ 無数の番号 n に対して $x \in A_n$ となる$\}$ を示せ．

(2) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in X\ ; \boxed{\qquad\qquad}$ に対して $x \in A_n$ となる$\}$ の空欄を正しく埋めよ．

(3) $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$ を示せ．

(4) X の部分集合 B に対して，χ_B は B の定義函数を表すものとする．このとき，

$$\liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) = \chi_A(x) \qquad (A := \liminf_{n\to\infty} A_n)$$

となることを示せ．

解 析 学 I： 中 間 試 験

２ 枚 目（4 枚あります） 2016 年 6 月 20 日出題　13:00〜15:00

氏名

得点 [2]

[2] X を空でない集合とし，$\mathscr{B} := \{E \subset X\ ;\ E$ または E^c は高々可算集合 $\}$ とする．

(1) $\mathscr{B}$ は σ 加法族であることを示せ．

(2) さらに X は非可算集合であるとする．各 $E \in \mathscr{B}$ に対して，$\mu(E) := \begin{cases} 0 & (E \text{ は高々可算}) \\ 1 & (E^c \text{ は高々可算}) \end{cases}$ とおくと μ は測度になることを示せ．

解 析 学 I： 中 間 試 験

3 枚 目（4 枚あります）　　2016 年 6 月 20 日出題　13:00〜15:00

氏名

得点 [3]

[**3**] Lebesgue 可測な $\mathbb{R}$ の部分集合の全体を $\mathcal{L}$ とし，$\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を m とする．
以下の各命題が正しいかどうか，理由とともに述べよ．
(1) $E \in \mathcal{L}$ とする．$m(E) = 0$ ならば，E は高々可算集合である．
(2) $E \in \mathcal{L}$ が有界ならば，$m(E) < +\infty$ である．
(3) $\mathbb{R}$ の開集合 E が $m(E) < +\infty$ をみたすなら，E は有界である．

得点 [4]

[**4**] $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を m で表す．$f(x) := \exp\bigl(-\bigl|[x]\bigr|\bigr)$ $(x \in \mathbb{R})$ とするとき，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\,dm$ を計算せよ．
ただし，$[x]$ はガウス記号で，x を越えない最大の整数を表す．(函数 $f(x)$ は，ガウス記号に絶対値を付し，それに負号を付けたものが e の肩に乗っている．)

解 析 学 I： 中 間 試 験

４ 枚 目（最後のページです） 2016 年 6 月 20 日出題　13:00〜15:00

氏名

得点 [5]

[5] $N \subset \mathbb{R}$ は Lebesgue 零集合とする．無理数 α をうまくとると，集合 $N + \alpha := \{x + \alpha\ ;\ x \in N\}$ は有理数をまったく含まないことを示せ．

得点 [6]

[6] $(X, \mathscr{B}, \mu)$ は測度空間で，$\mu(X) < +\infty$ とする．$\nu(X) < +\infty$ をみたす有限加法的測度 $\nu : \mathscr{B} \to [\,0, +\infty\,)$ が次の性質を持つとき，ν は可算加法的，すなわち測度であることを示せ．

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ s.t. }\ \mu(E) < \delta \ \ (E \in \mathscr{B}) \implies \nu(E) < \varepsilon.$$