# 数学特論８（学部）表現論大意（大学院）レポート問題

出題：2013 年 7 月 18 日　　　　（担当：野村隆昭）

∗ (1)〜(7) のすべてに解答すること．
∗ <u>A4 レポート用紙</u>にて数理事務室に提出のこと．
∗ 名前と学年，学生番号を忘れない様に．

<u>提出期限</u>：2013 年 8 月 19 日 (月) 17 時　厳守

---

$n$ 次の実対称行列のなすベクトル空間を $V$ とする．$E_{ij}$ で，$(i,j)$ 成分のみが 1，その他の成分すべてが 0 である行列を表すものとし（行列単位），

$$f_{ii} := E_{ii} \quad (i = 1, \dots, n), \qquad f_{ij} := E_{ij} + E_{ji} \quad (1 \leqq i < j \leqq 1)$$

とおく．明らかに $\{f_{ij}\,;\, 1 \leqq i \leqq j \leqq n\}$ はベクトル空間 $V$ の基底をなしている．
以下の各問に答えよ．

(1) 次で定義される $V$ 上の線型写像 $T_i$ $(i = 1, \dots, n)$ の固有値と固有空間をすべて求めよ：

$$T_i x := \frac{1}{2}(f_{ii}x + xf_{ii}) \qquad (x \in V).$$

(2) $n$ 個の実数 $t_1, \dots, t_n$ に対して，$T := \sum_{i=1}^{n} t_i T_i$ とおくとき，線型写像 $T$ の固有値と固有空間をすべて求めよ．

(3) 対角成分がすべて正の $n$ 次の下三角行列からなる群を $H$ とする：

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large $*$} & & & a_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a_1 > 0, \\ a_2 > 0, \\ \vdots \\ a_n > 0 \end{matrix} \right\} \subset GL(n, \mathbb{R}).$$

また，$\Omega$ は $V$ の正定値なものからなる開凸錐とする：

$$\Omega := \{x \in V \mid x \gg 0\}.$$

このとき，$H$ は $\Omega$ に $H \times \Omega \ni (h, x) \mapsto hx\,{}^t\!h \in \Omega$ によって単純推移的に作用することを示せ．

裏面に続く

(4) $H$ の Lie 代数は，下三角行列全体からなる集合 $\mathfrak{h}$ である（証明不要）：

$$\mathfrak{h} = \begin{pmatrix} * & & & \text{\Large 0} \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large $*$} & & & * \end{pmatrix}$$

各 $x = (x_{ij}) \in V$ に対して，$\underline{x} \in \mathfrak{h}$ を次式で定義する：

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & & & \text{\Large 0} \\ x_{21} & \frac{1}{2}x_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_{r1} & \cdots & x_{r,r-1} & \frac{1}{2}x_{rr} \end{pmatrix}.$$

また $V$ 上の線型写像 $L_x$ を，$L_x y = \underline{x}\, y + y\, {}^t(\underline{x})$ $(y \in V)$ で定義する．$V$ の基底 $\{f_{ij}\,;\, 1 \leqq i \leqq j \leqq n\}$ に辞書的順序を入れるとき，すなわち，

$$f_{11}, \ldots, f_{1n}, f_{22}, \ldots, f_{2n}, \ldots, f_{nn}$$

というように順序をつけるとき，その順序づけられた基底で線型写像 $L_{f_{ij}}$ $(i < j)$ を行列で表すと，真に下三角な（つまり対角成分がすべて $0$ である下三角）行列で表されることを示せ．

(5) (4) にいう順序づけられた $V$ の基底で $V$ 上の線型写像を行列表示をするとき，すべての $x \in V$ に対して，$L_x$ は下三角行列であることを示せ（$L_{f_{ii}}$ は (1) の $T_i$ に等しいことに注意）．

(6) 線型写像 $L_x$ $(x \in V)$ のトレースは，$\dfrac{n+1}{2}\operatorname{Tr} x$ に等しいことを示せ．ここで，$\operatorname{Tr} x$ は行列 $x$ のトレースである．

(7) $x \mathbin{\triangle} y := L_x y$ $(x, y \in V)$ とおく．線型写像 $L_{x \triangle y}$ のトレースをとることで得られる双線型形式 $\tau(x,y) := \operatorname{Tr} L_{x \triangle y}$ は，$V$ に内積を定めていることを示せ．

以上