§1. 正則開凸錐とその双対性

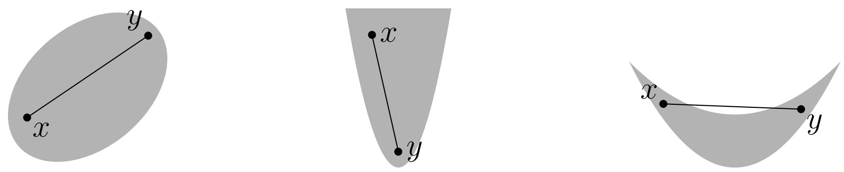
V：有限次元実ベクトル空間，正定値内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を持つ[1].
内積から得られる V のノルムを $\|\cdot\|$ で表す：$\|x\| := \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle}$.

定義 1.1. (1) $S \subset V$ が凸集合[2](**convex set**) であるとは，$x, y \in S$ であるとき，x, y を結ぶ線分も S に属するときをいう．

(2) $S \subset V$ が錐 (**cone**) であるとは，

$$\forall x \in S,\ \ \forall \lambda > 0 \implies \lambda x \in S$$

となるときをいう．凸集合である錐を凸錐という．



凸集合　　　　凸集合　　　　凸集合ではない

- S：凸錐 $\iff$ $x, y \in S$ のとき，$\forall\lambda > 0$ と $\forall\mu > 0$ に対して，$\lambda x + \mu y \in S$.
- 開凸錐 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 開集合である凸錐，　• 閉凸錐 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 閉集合である凸錐

補題 1.2. $S \subset V$：閉凸集合，$x \notin S \implies \exists s_0 \in S$ s.t. $\displaystyle\inf_{s \in S} \|x - s\| = \|x - s_0\|$.

注意 1.3. この補題は有限次元でなくても，Hilbert 空間でも成り立つ．

証明. 以下 $l := \displaystyle\inf_{s \in S} \|x - s\|$ とおく．このとき

$$\exists s_n \in S\ (n = 1, 2, \ldots)\ \text{ s.t. }\ l = \lim_{n \to \infty} \|x - s_n\|.$$

点列 $\{s_n\}$ は Cauchy 列であることを示そう．

$\boxed{\text{中線定理.}}$ $a, b \in V$ のとき，$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right)$ が成り立つ[3].
（ノルムを展開して，$\|a \pm b\|^2 = \|a\|^2 \pm 2\langle a \,|\, b \rangle + \|b\|^2$ より明らか．）

$a = x - s_n$，$b = x - s_m$ として中線定理を適用すると

$$\|2x - (s_n + s_m)\|^2 + \|s_n - s_m\|^2 = 2\left(\|x - s_n\|^2 + \|x - s_m\|^2\right).$$

---

[1] $\mathbb{R}^n$ としてもよいが，内積を取り替えることもあるので，初めから $\mathbb{R}^n$ に固定すると却ってややこしい．

[2] 凸という漢字の書き順は 2 通りあるらしい．左上の縦棒から始めるとするのと，左上の横棒から始めるとするというもの．どちらにしても 5 画である．部首分類としては凵繞（かんにょう），凵部（かんぶ），凵（うけばこ），凵構えに属する．凹（これも 5 画），函，出，凶などが同類．

[3] 英語では parallelogram law という．

移項して，$\frac{1}{2}(s_n+s_m)\in S$ であることより

$$\begin{aligned}\|\, s_n - s_m \,\|^2 &= 2\left(\|\, x - s_n \,\|^2 + \|\, x - s_m \,\|^2\right) - 4\left\| x - \frac{s_n + s_m}{2} \right\|^2 \\ &\leqq 2\left(\|\, x - s_n \,\|^2 + \|\, x - s_m \,\|^2\right) - 4l^2.\end{aligned}$$

$n, m \to \infty$ とすると（少し雑な言い方であるが）

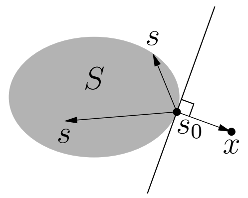
$$\limsup_{n,m\to\infty} \|\, s_n - s_m \,\|^2 \leqq 4l^2 - 4l^2 = 0.$$

ゆえに $\{s_n\}$ は Cauchy 列であるので，$\exists s_0 = \lim_{n\to\infty} s_n$．仮定より S は閉集合ゆえ $s_0 \in S$．そして $\|\, x - s_0 \,\| = \lim_{n\to\infty} \|\, x - s_n \,\| = l$ が成り立つ． □

補題 1.4. $S \subset V$ は閉凸集合，$s_0 \in S$ は補題 1.2 のものとする．このとき[4]

$$\langle\, x - s_0 \,|\, s_0 \,\rangle \geqq \langle\, x - s_0 \,|\, s \,\rangle \quad (\forall s \in S).$$

証明. 不等式 $\|\, x - s_0 \,\| \leqq \|\, x - s \,\|$ $(\forall s \in S)$ において，s のところを $\forall\lambda$ $(0<\lambda<1)$ をとって，$(1-\lambda)s_0 + \lambda s \in S$ とすることにより，



$$\|\, x - s_0 \,\|^2 \leqq \|\, x - (1-\lambda)s_0 - \lambda s \,\|^2 = \|\, (x - s_0) + \lambda(s_0 - s) \,\|^2.$$

両辺を展開して整理すると

$$2\lambda \langle\, x - s_0 \,|\, s_0 - s \,\rangle + \lambda^2 \|\, s_0 - s \,\|^2 \geqq 0.$$

λ で割ってから $\lambda \to +0$ として，$\langle\, x - s_0 \,|\, s_0 - s \,\rangle \geqq 0$．すなわち補題を得る． □

定義 1.5. $S \subset V$ とする．次の集合 S° を S の極集合という．

$$S^\circ := \{\, x \in V \,;\, \langle\, x \,|\, s \,\rangle \leqq 1 \ \text{ for } \forall s \in S \,\}.$$

注意 1.6. S が錐 C ならば，$C^\circ = \{\, x \in V \,;\, \langle\, x \,|\, c \,\rangle \leqq 0 \ \text{ for } \forall c \in C \,\}$ となる．実際 $x \in C^\circ$，$c \in C$ のとき，$\forall\lambda > 0$ に対して $\lambda c \in C$ より，$\langle\, x \,|\, c \,\rangle \leqq \frac{1}{\lambda}$ ゆえ，$\lambda \to +\infty$ とすればよい．したがって，C° は凸錐になる．

定理 1.7. S：原点 0 を含む閉凸集合 $\Longrightarrow$ $(S^\circ)^\circ = S$．

証明. $S \subset (S^\circ)^\circ$ は明らか．ゆえに $x \notin S$ ならば $(S^\circ)^\circ$ に属さないこと，すなわち $\exists y_0 \in S^\circ$ s.t. $\langle\, y_0 \,|\, x \,\rangle > 1$ を示せばよい．補題 1.2 より x から S の元への最短距離を実現する $s_0 \in S$ があり，補題 1.4 の不等式が成り立つ．その不等式で $s = 0 \in S$ とおくと $\langle\, x - s_0 \,|\, s_0 \,\rangle \geqq 0$ を得る．ここで $x \neq s_0$ であるから

$$\langle\, x - s_0 \,|\, x - s_0 \,\rangle = \|\, x - s_0 \,\|^2 > 0.$$

ゆえに $\langle\, x - s_0 \,|\, x \,\rangle > \langle\, x - s_0 \,|\, s_0 \,\rangle \geqq 0$ であるから，$t > 0$ を選んで

$$\langle\, x - s_0 \,|\, x \,\rangle > t > \langle\, x - s_0 \,|\, s_0 \,\rangle \,(\geqq 0).$$

[4]結論を $\langle\, x - s_0 \,|\, s - s_0 \,\rangle \leqq 0$（鈍角をなす）と見る方が直感に合う．図参照．

左端の不等式より，$\left\langle \dfrac{x-s_0}{t} \,\middle|\, x \right\rangle > 1$．一方補題1.4と右側の不等式より

$$\left\langle \frac{x-s_0}{t} \,\middle|\, s \right\rangle \leqq \left\langle \frac{x-s_0}{t} \,\middle|\, s_0 \right\rangle < 1 \quad (\forall s \in S).$$

これらは，$y_0 := \frac{1}{t}(s-s_0)$ が所要の元であること示している． □

C を凸錐とするとき，$C^\sharp := \{\, x \,;\, \langle\, x \,|\, y \,\rangle \geqq 0 \ (\forall y \in C) \,\}$ とおく．

- $C^\sharp$ は閉凸錐であって，$C^\sharp = -C^\circ$．

定理 1.8. C が閉凸錐ならば，$(C^\sharp)^\sharp = C$．

命題 1.9. C が閉凸錐なら，$\mathrm{Int}\, C^\sharp = \{\, x \,;\, \langle\, x \,|\, c \,\rangle > 0 \ \ (\forall c \in C \setminus \{0\}) \,\}$．

証明. $x \in V$ とする．
(1) ある $c_0 \in C \setminus \{0\}$ に対して $\langle\, x \,|\, c_0 \,\rangle \leqq 0$ とすると，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\langle\, x - \varepsilon c_0 \,|\, c_0 \,\rangle = \langle\, x \,|\, c_0 \,\rangle - \varepsilon \|\, c_0 \,\|^2 < 0$．ゆえに $x - \varepsilon c_0 \notin C^\sharp$ $(\forall \varepsilon > 0)$，すなわち $x \notin \mathrm{Int}\, C^\sharp$．
(2) $\langle\, x \,|\, c \,\rangle > 0$ $(\forall c \in C \setminus \{0\})$ のとき，$f(y) := \langle\, x \,|\, y \,\rangle$ は，$S := \{\, y \,;\, \|\, y \,\| = 1 \,\}$ とするとき，コンパクト集合 $C \cap S$ で最小値 $\delta > 0$ をとる．このとき，$\|\, u \,\| < \delta$ ならば，$\forall c \in C \setminus \{0\}$ に対して

$$\langle\, x+u \,|\, c \,\rangle = \|\, c \,\| \left\langle x \,\middle|\, \frac{c}{\|\, c \,\|} \right\rangle + \langle\, u \,|\, c \,\rangle \geqq \delta \|\, c \,\| - \|\, u \,\| \|\, c \,\| = (\delta - \|\, u \,\|) \|\, c \,\| \geqq 0$$

ゆえに $x + u \in C^\sharp$ となって $x \in \mathrm{Int}\, C^\sharp$ である． □

C が閉凸錐であるとき，

- $C - C := \{\, x - y \,;\, x \in C,\ y \in C \,\}$ は C を含む最小の部分空間．
- $-C := \{\, -x \,;\, x \in C \,\}$ とおくとき，$C \cap (-C)$ は C に含まれる最大の部分空間．

補題 1.10. C が閉凸錐なら，$(C^\sharp - C^\sharp)^\perp = C \cap (-C)$．

証明.
$$\begin{aligned} x \in (C^\sharp - C^\sharp)^\perp &\iff \langle\, x \,|\, y \,\rangle = 0 \ \ (\forall y \in C^\sharp) \\ &\iff x \in (C^\sharp)^\sharp = C,\ \text{かつ}\ -x \in (C^\sharp)^\sharp = C. \end{aligned}$$
□

命題 1.11. 閉凸錐 C について次は同値．
(1) C は1次元部分空間を含まない． (2) $C \cap (-C) = \{0\}$． (3) $\mathrm{Int}\, C^\sharp \neq \varnothing$．

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2) は明らか．次 (3) $\Longrightarrow$ (1) は命題1.9より明らか．(2) が成り立てば，補題1.10より，$C^\sharp - C^\sharp = V$．左辺は $C^\sharp$ を含む最小の部分空間であるから，$C^\sharp$ の元から成る V の基底 $e_1, \ldots, e_n$ がとれる．ここで $n := \dim V$ であり，$\|\, e_j \,\| = 1$

$(\forall j = 1, \ldots, n)$ としてよい．このとき $e_1, \ldots, e_n$ の凸包[5] $< e_1, \ldots, e_n >$ は，

$$< e_1, \ldots, e_n > := \{\, \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \; ; \; \lambda_j \geqq 0 \; (\forall j = 1, \ldots, n), \; \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 \,\}$$

で，閉単位球を B とするとき，$< e_1, \ldots, e_n > \subset B \cap C^\sharp$ である．このとき，たとえば $\frac{1}{n}(e_1 + \cdots + e_n) \in \mathrm{Int}\, C^\sharp$ であることは容易に示せる． $\square$

定義 1.12. Ω：開凸錐．Ω が正則 (**regular**) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Ω は直線を含まない．

補題 1.13. 開凸錐が Ω 正則 $\Longleftrightarrow$ $\overline{\Omega}$ は 1 次元部分空間を含まない．

証明. $a \in V$，$0 \neq x_0 \in V$ に対して $a + tx_0 \in \Omega$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ とする．$t > 0$ のとき $x + \frac{1}{t}a \in \Omega$ であり，$t < 0$ のとき $-x - \frac{1}{t} \in \Omega$．それぞれにおいて $t \to +\infty$，$t \to -\infty$ として，$\pm x \in \overline{\Omega}$．ゆえに $\overline{\Omega}$ は 1 次元部分空間を含む．逆を示すために，次の事実に注意する： $\boxed{\Omega + \overline{\Omega} \subset \Omega}$．実際，$x \in \Omega$，$y \in \overline{\Omega}$ とする．$\delta > 0$ を選んで，$\|\, u \,\| < \delta$ ならば $x + u \in \Omega$ としておく．そして $\|\, y - y_0 \,\| < \delta$ となる $y_0 \in \Omega$ がとれるから，

$$x + y = (x + (y - y_0)) + y_0 \in \Omega + \Omega \subset \Omega. \; //$$

さて $x_0 \neq 0$ に対して，$\overline{\Omega} \supset \mathbb{R}x_0$ と仮定し，$a \in \Omega$ をとる．このとき，$\forall t \in \mathbb{R}$ に対して，$a + tx_0 \in \Omega + \overline{\Omega} \subset \Omega$ となっている． $\square$

定理 1.14. Ω：正則開凸錐，$\Omega^* := \{\, y \; ; \; \langle\, y \,|\, x \,\rangle > 0 \;\; (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \,\}$.

(1) $\Omega^* \neq \varnothing$ であり，Ω^* も正則開凸錐．　（内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する Ω の双対錐という.）

(2) $(\Omega^*)^* = \Omega$.

証明. (1) 定義と命題 1.9 より，$\Omega^* = \mathrm{Int}(\overline{\Omega}^\sharp)$ に注意．したがって Ω^* は開凸錐である．$\overline{\Omega}$ は 1 次元部分空間を含まないから，$\overline{\Omega} \cap (-\overline{\Omega}) = \{0\}$．ゆえに命題 1.11 より $\Omega^* \neq \varnothing$ がわかる．さらに補題 1.10，定理 1.8 より

$$\overline{\Omega}^\sharp \cap \big(-\overline{\Omega}^\sharp\big) = \big[\big(\overline{\Omega}^\sharp\big)^\sharp - \big(\overline{\Omega}^\sharp\big)^\sharp\big]^\perp = (\overline{\Omega} - \overline{\Omega})^\perp = \overline{\Omega}^\perp \subset (\Omega)^\perp = \{0\}.$$

ゆえに $\overline{\Omega^*} = \overline{\Omega}^\sharp$（下の注意 (2) 参照）は 1 次元部分空間を含まない．

(2) $(\Omega^*)^* = \mathrm{Int}(\overline{\Omega^*})^\sharp = \mathrm{Int}\big(\big(\overline{\Omega}^\sharp\big)^\sharp\big) = \mathrm{Int}(\overline{\Omega}) = \Omega$（最後の等号は下の注意 (1)）． $\square$

注意 1.15. (1) 一般には，開集合 A に対して $\mathrm{Int}\,\overline{A} \supsetneqq A$ であるが，正則開凸錐 $\Omega \neq \varnothing$ のときは $\mathrm{Int}\,\overline{\Omega} = \Omega$ である．まず $a \in \Omega$ をとっておく．$a \neq 0$ に注意．そこで $\forall x \in \mathrm{Int}(\overline{\Omega})$ に対して，$\exists \delta > 0$ s.t. $\|\, u \,\| < \delta$ なら $x + u \in \overline{\Omega}$．このとき，$x = \big(x - \frac{\delta}{2\|\, a \,\|}a\big) + \frac{\delta}{2\|\, a \,\|}a \in \overline{\Omega} + \Omega \subset \Omega$.

(2) $\overline{\Omega^*} = \overline{\Omega}^\sharp$．$\subset$ は自明．$\supset$ について：$y_0 \in \Omega^*$ を固定．$\forall y \in \overline{\Omega}^\sharp$ と $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$y + \varepsilon y_0 \in \Omega^*$ が示せる．そして $\varepsilon \to +0$ として $y \in \overline{\Omega^*}$ （一般の閉集合 B に対しては，$\overline{\mathrm{Int}\, B} \subsetneqq B$）．

[5] $e_1, \ldots, e_n$ を含む最小の凸集合.

§2. 開凸錐の例

例 2.1. $\mathbb{R}^n$ において一つの基底 $e_1,\dots,e_n$（必ずしも正規直交ではない）をとり

$$\Omega(e_1,\dots,e_n) := \Big\{ \sum_{j=1}^{n} t_j e_j \ ;\ t_j > 0\ (j=1,\dots,n) \Big\}$$

とおく（第１象限）．明らかに $\Omega(e_1,\dots,e_n)$ は開凸錐.

(1) $f_1,\dots,f_n$ を $e_1,\dots,e_n$ に双対な基底，つまり $\mathbb{R}^n$ の標準内積を $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ で表すとき，$\langle\, f_i \,|\, e_j \,\rangle = \delta_{ij}$ をみたすものとすると，$\Omega(e_1,\dots,e_n)^* = \Omega(f_1,\dots,f_n)$.

証明.　明らかに

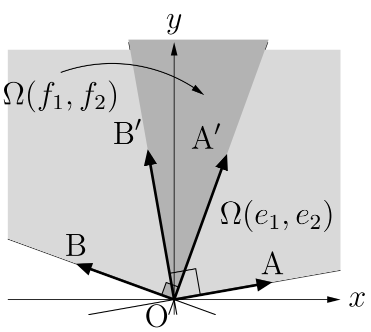
$$\overline{\Omega(e_1,\dots,e_n)} = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} t_j e_j \ ;\ t_j \geqq 0\ (j=1,\dots,n) \Big\}.$$

さて $y \in \Omega(e_1,\dots,e_n)^*$ とし，$y = \sum \lambda_j f_j$ と表す．$e_k \in \overline{\Omega(e_1,\dots,e_n)} \setminus \{0\}$ $(\forall k)$ であるから，$0 < \langle\, y \,|\, e_k \,\rangle = \lambda_k$ $(\forall k)$ となって $y \in \Omega(f_1,\dots,f_n)$.

逆に $y = \sum \lambda_j f_j \in \Omega(f_1,\dots,f_n)$ ならば，$\forall x = \sum t_j e_j \in \overline{\Omega(e_1,\dots,e_n)} \setminus \{0\}$ に対して，$\langle\, y \,|\, x \,\rangle = \sum \lambda_j t_j$．ここで各 $j = 1,\dots,n$ に対して，$\lambda_j > 0$，$t_j \geqq 0$ であって，$t_1 = \cdots = t_n = 0$ ではないので $\langle\, y \,|\, x \,\rangle > 0$ となる．よって $y \in \Omega(e_1,\dots,e_n)^*$.　□

(2) (1) より，$e_1,\dots,e_n$ が正規直交基底であれば，$\Omega(e_1,\dots .e_n)^* = \Omega(e_1,\dots .e_n)$.
一般に，$\Omega^* = \Omega$ となる開凸錐を自己双対 (**selfdual**) であるという.

(3) $\mathbb{R}^2$ でより詳しく見てみよう．簡単のため，$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ とする.



$$\begin{aligned}
e_1 &:= \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\cos\alpha,\ \sin\alpha),\\
e_2 &:= \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (\cos\beta,\ \sin\beta),\\
r &:= \sin(\beta-\alpha) > 0,\\
f_1 &:= \overrightarrow{\mathrm{OA'}} = r^{-1}\big(\cos\big(\beta-\tfrac{\pi}{2}\big), \sin\big(\beta-\tfrac{\pi}{2}\big)\big)\\
&= r^{-1}(\sin\beta,\ -\cos\beta),\\
f_2 &:= \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = r^{-1}\big(\cos\big(\alpha+\tfrac{\pi}{2}\big), \sin\big(\alpha+\tfrac{\pi}{2}\big)\big)\\
&= r^{-1}(-\sin\alpha,\ \cos\alpha).
\end{aligned}$$

$\langle\, f_1 \,|\, e_1 \,\rangle = r^{-1}(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) = 1$,　　$\langle\, f_1 \,|\, e_2 \,\rangle = \langle\, f_2 \,|\, e_1 \,\rangle = 0$,
$\langle\, f_2 \,|\, e_2 \,\rangle = r^{-1}(-\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = 1$,
ゆえに，f_1, f_2 は e_1, e_2 に双対な基底となるので，$\Omega(e_1,e_2)^* = \Omega(f_1,f_2)$.
特に $\alpha = \frac{\pi}{4}$，$\beta = \frac{3\pi}{4}$ のとき，$\Omega(e_1,e_2)$ は自己双対である.

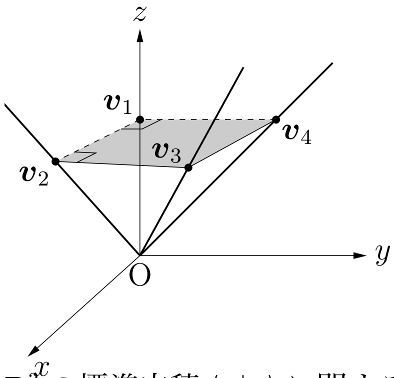
例 2.2. 以下 $\mathbb{R}^3$ で考える．$\mathbb{R}^3$ の元 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ に対して

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle_+ := \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j \boldsymbol{a}_j \ ; \ t_j > 0 \ (\forall j > 0) \right\}$$

とおく．明らかに，$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle_+$ は，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の凸包を断面に持ち，原点を頂点とする開凸錐である．さて次の 4 個のベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をとって，開凸錐 $\Omega := \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle_+$ を考えよう．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4$ の凸包は 1 辺の長さが 1 の正方形である．



$\mathbb{R}\boldsymbol{v}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_2$：平面 $y = 0$（xz 平面）

$\mathbb{R}\boldsymbol{v}_2 + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_3$：平面 $x = z$

$\mathbb{R}\boldsymbol{v}_3 + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_4$：平面 $y = z$

$\mathbb{R}\boldsymbol{v}_4 + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_1$：平面 $x = 0$（yz 平面）

ゆえに[1]，$\Omega = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{cc} x > 0, & y > 0 \\ z - x > 0, & z - y > 0 \end{array} \right\}$.

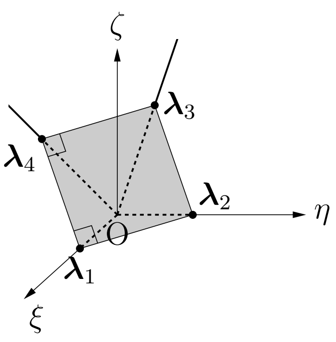
$\mathbb{R}^3$ の標準内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する Ω の双対凸錐 Ω^* は，

$$\boldsymbol{\lambda}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくとき，

$$\Omega^* = \langle \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3, \boldsymbol{\lambda}_4 \rangle_+ = \left\{ \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{cc} \zeta > 0, & \xi + \zeta > 0 \\ \xi + \eta + \zeta > 0, & \eta + \zeta > 0 \end{array} \right\} \quad \cdots\cdots \ ①$$

で与えられる．まず，①の右側の等号は，



$\mathbb{R}\boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{\lambda}_2$：平面 $\zeta = 0$（$\xi\eta$ 平面）

$\mathbb{R}\boldsymbol{\lambda}_2 + \mathbb{R}\boldsymbol{\lambda}_3$：平面 $\xi + \zeta = 0$

$\mathbb{R}\boldsymbol{\lambda}_3 + \mathbb{R}\boldsymbol{\lambda}_4$：平面 $\xi + \eta + \zeta = 0$

$\mathbb{R}\boldsymbol{\lambda}_4 + \mathbb{R}\boldsymbol{\lambda}_1$：平面 $\eta + \zeta = 0$

であることよりわかる．

断面は 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ の長方形である．

---

[1]たとえば，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_3$ の中点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ が入っている側ということで．

左側の等号を示すために，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\lambda}=\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ とするとき，

$\langle\,\boldsymbol{\lambda}_1\,|\,\boldsymbol{x}\,\rangle=x,\quad \langle\,\boldsymbol{\lambda}_2\,|\,\boldsymbol{x}\,\rangle=y,\quad \langle\,\boldsymbol{\lambda}_3\,|\,\boldsymbol{x}\,\rangle=-x+z,\quad \langle\,\boldsymbol{\lambda}_4\,|\,\boldsymbol{x}\,\rangle=-y+z\ \ \cdots\cdots$ ②

$\langle\,\boldsymbol{\lambda}\,|\,\boldsymbol{v}_1\,\rangle=\zeta,\quad \langle\,\boldsymbol{\lambda}\,|\,\boldsymbol{v}_2\,\rangle=\xi+\zeta,\quad \langle\,\boldsymbol{\lambda}\,|\,\boldsymbol{v}_3\,\rangle=\xi+\eta+\zeta,\quad \langle\,\boldsymbol{\lambda}\,|\,\boldsymbol{v}_4\,\rangle=\eta+\zeta\ \cdots$ ③

となっていることに注意すればよい．

実際，まず $\boldsymbol{\lambda}\in\langle\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\boldsymbol{\lambda}_3,\boldsymbol{\lambda}_4\rangle_+$ とする．①の右側の等号と③より，$\langle\,\boldsymbol{\lambda}\,|\,\boldsymbol{v}_j\,\rangle>0$ $(j=1,2,3,4)$ が成り立つので，$\forall\boldsymbol{v}\in\overline{\Omega}$ を $\boldsymbol{v}=a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2+a_3\boldsymbol{v}_3+a_4\boldsymbol{v}_4$ $(a_j\geqq 0)$ と表せば

$$\langle\,\boldsymbol{\lambda}\,|\,\boldsymbol{v}\,\rangle=\sum_{j=1}^{4}a_j\langle\,\boldsymbol{\lambda}\,|\,\boldsymbol{v}_j\,\rangle\geqq 0.$$

等号は $a_j=0$ $(\forall j)$，すなわち $\boldsymbol{v}=0$ の時に成り立つ．ゆえに $\boldsymbol{\lambda}\in\Omega^*$．

逆に $\boldsymbol{x}\in\big(\langle\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\boldsymbol{\lambda}_3,\boldsymbol{\lambda}_4\rangle_+\big)^*$ ならば，$\lambda_j\in\langle\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\boldsymbol{\lambda}_3,\boldsymbol{\lambda}_4\rangle_+\setminus\{0\}$ ゆえ，$\langle\,\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\lambda}_j\,\rangle>0$ $(j=1,2,3,4)$．②より $\boldsymbol{x}\in\Omega$ となる．ゆえに，$\big(\langle\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\boldsymbol{\lambda}_3,\boldsymbol{\lambda}_4\rangle_+\big)^*\subset\Omega$．開凸錐の双対性より，$\langle\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\boldsymbol{\lambda}_3,\boldsymbol{\lambda}_4\rangle_{=}\big(\langle\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\boldsymbol{\lambda}_3,\boldsymbol{\lambda}_4\rangle_+\big)^{**}\subset\Omega^*$ となって，逆向きの包含関係も示せた．

例 2.3.　Lorentz 錐

$n\geqq 2$ とする．

$$\Omega:=\{x\in\mathbb{R}^n\ ;\ x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2>0,\ x_1>0\}.$$

明らかに Ω は開凸錐で，この Ω を **Lorentz** 錐（光錐とも呼ばれる）という．

定理 2.4.　$\mathbb{R}^n$ の標準内積を $\langle\cdot|\cdot\rangle$ に関する Ω の双対錐を Ω^* とすると，$\Omega^*=\Omega$．したがって，Lorentz 錐は自己双対．

証明.　（あ）$\Omega\subset\Omega^*$ であること：$y\in\overline{\Omega}$ とする．任意の $x\in\overline{\Omega}$ に対して

$$\begin{aligned}\langle\,y\,|\,x\,\rangle&=y_1x_1+y_2x_2+\cdots+y_nx_n\\&\geqq y_1x_1-\sqrt{y_2^2+\cdots+y_n^2}\sqrt{x_2^2+\cdots+x_n^2}\\&\geqq 0.\end{aligned}$$

ゆえに $y\in(\overline{\Omega})^\sharp=\overline{\Omega^*}$ となるので，$\overline{\Omega}\subset\overline{\Omega^*}$，よって $\Omega=\mathrm{Int}\,\overline{\Omega}\subset\mathrm{Int}(\overline{\Omega^*})=\Omega^*$．

（い）$\Omega^*\subset\Omega$ であること：$y\in\Omega^*$ とする．(1) $y_2=\cdots=y_n=0$ のとき．$\boldsymbol{e}_1:=(1,0,\dots,0)\in\overline{\Omega}\setminus\{0\}$ より，$y_1=\langle\,y\,|\,e_1\,\rangle>0$．ゆえに $y\in\Omega$ となって OK.

(2) $y_2,\dots,y_n$ に 0 でないものがある場合.

$$x_1:=\sqrt{y_2^2+\cdots+y_n^2},\quad x_j:=-y_j\ \ (j=2,\dots,n)$$

とおいて，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を考えると，$x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$．ゆえに

$$0 < \langle\, y \,|\, x \,\rangle = y_1\sqrt{y_2^2 + \cdots + y_n^2} - (y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

これより $y_1 > \sqrt{y_2^2 + \cdots + y_n^2}$ が出るので，$y \in \Omega$ である． $\square$

例 2.5. 正定値実対称行列のなす開凸錐

$V := \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$：$n$ 次実対称行列のなすベクトル空間．

$\Omega := \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})^{++} = \{x \in V \,;\, x \gg 0\}$： 正定値実対称行列のなす開凸錐．

ここで，$x \in V$ について，($\langle\, \xi \,|\, \eta \,\rangle_{\mathbb{R}^n} := {}^t\eta\xi$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積)

$$x \in \Omega \iff x \text{ の固有値はすべて正} \iff \langle\, x\xi \,|\, \xi \,\rangle_{\mathbb{R}^n} > 0 \ (\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

(2) V に内積 $\langle\, x \,|\, y \,\rangle := \mathrm{tr}(xy)$ を入れる．実際 $\langle\, x \,|\, x \,\rangle = \sum_{i,j} x_{ij}x_{ji} = \sum_{i,j} x_{ij}^2$（行列 x のすべての成分の平方の和）となるから，確かに正定値内積である．この内積に関する双対錐を Ω^* とすると，$\Omega^* = \Omega$，すなわち，Ω は自己双対である．

証明. $y \in \Omega^*$ とする．任意の $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して，$x = \xi\,{}^t\xi$ とおくと，$\forall \eta \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\langle\, x\eta \,|\, \eta \,\rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^t\eta x \eta = {}^t\eta\xi\,{}^t\xi\eta = \langle\, \xi \,|\, \eta \,\rangle_{\mathbb{R}^n}^2 \geqq 0$ がわかるから，$x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$．ゆえに

$$0 < \langle\, y \,|\, x \,\rangle = \mathrm{tr}(y\xi\,{}^t\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} y_{ij}\xi_j\xi_i = \langle\, y\xi \,|\, \xi \,\rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

よって $\langle\, y\xi \,|\, \xi \,\rangle_{\mathbb{R}^n} > 0$ となり $y \in \Omega$．したがって $\Omega^* \subset \Omega$ が示せた．

逆に $x \in \Omega$ とする．このとき $x^{1/2} \in \Omega$ をとる[2]と，$\forall y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して

$$\langle\, (x^{1/2}yx^{1/2})\xi \,|\, \xi \,\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle\, y(x^{1/2}\xi) \,|\, (x^{1/2}\xi) \,\rangle_{\mathbb{R}^n} \geqq 0 \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}).$$

そうして $x = (x^{1/2})^2$ に注意すると（$x^{1/2}yx^{1/2}$ の固有値は非負だが，正のものもあるので），$\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(x^{1/2}yx^{1/2}) > 0$．これは $x \in \Omega^*$ を意味する． $\square$

注意 2.6. $\varphi : \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ y & z \end{smallmatrix}\right) \mapsto (x, \sqrt{2}\,y, z)$ により，内積も込めて $\mathrm{Sym}(2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$ とみなす．$\Omega := \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})^{++}$ とすると，$\Omega = \{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ y & z \end{smallmatrix}\right) \,;\, x > 0, xz - y^2 > 0\}$ であり，したがって，$\varphi(\Omega) = \{\boldsymbol{x} = (x, y, z) \,;\, x > 0, xz > \frac{1}{2}y^2\}$ となる．座標軸を回転して，$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v)$，$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v)$ とすると，$\varphi(\Omega) = \{(u, y, v) \,;\, u > 0, u^2 > v^2 + y^2\}$ となって，これは Lorentz 錐である（注意：$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tr}X > 0$）．

---

[2]直交行列 T により $x = {}^tTDT$，ただし D は対角線に x の固有値（すべて正）λ_j が並ぶ対角行列，とできる．対角線に $\lambda^{1/2}$ が並ぶ対角行列を $D^{1/2}$ として，$x^{1/2} := {}^tTD^{1/2}T$ とすればよい．

§3. 開凸錐の線型自己同型群

以下，V：内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を持つ有限次元実ベクトル空間，
$\| x \| := \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle}$ は内積から決まるノルム．
このとき，Schwarz の不等式が成り立つ：$|\langle x \,|\, y \rangle| \leqq \| x \| \| y \|$.
• V 上の任意の線型形式 λ（すなわち λ は線型作用素（線型写像）$V \to \mathbb{R}$）に対して，$\exists 1\, y \in V$ s.t. $\lambda(x) = \langle x \,|\, y \rangle \quad (\forall x \in V)$.
証明．　正規直交基底をとればすぐにわかるが，そのように議論すると，基底に依存するようで気持ち悪い．Hilbert 空間のときのように議論するとよい．λ が零形式なら，$y = 0$ ととればよいので，$\lambda \neq 0$ とする．$M := \operatorname{Ker} \lambda = \{x \in V \,;\, \lambda(x) = 0\}$ とおくと，M は部分空間で $M \neq V$．すなわち $M^{\perp} \neq \{0\}$．ゆえに $\exists u \in M^{\perp}$ s.t. $\| u \| = 1$.
このとき，$\forall x \in V$ に対して $\lambda(u)x - \lambda(x)u \in M$ より

$$0 = \langle \lambda(u)x - \lambda(x)u \,|\, u \rangle = \langle x \,|\, \lambda(u)u \rangle - \lambda(x).$$

ゆえに，$y = \lambda(u)u$ とおくとよい．一意性は明らか．　□

$\mathcal{L}(V)$：V 上の線型作用素の全体．
$T \in \mathcal{L}(V)$ に対して，$\| T \| := \max\limits_{\| x \| \leqq 1} \| Tx \|$ とおく（T の作用素ノルム）．
(1) $\| T \| = 0 \iff T = 0$（零作用素），
(2) $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき，$\| \alpha T \| = |\alpha| \| T \|$,
(3) （三角不等式）$\| T + S \| \leqq \| T \| + \| S \|$.
このノルムにより，$\mathcal{L}(V)$ はノルム空間，とくに距離空間になる．
• $\| Tx \| \leqq \| T \| \| x \| \ (T \in \mathcal{L}(V),\ x \in V)$.
　実際 $x \neq 0$ のときは，$\| Tx \| = \| x \| \left\| T\left(\dfrac{x}{\| x \|} \right) \right\| \leqq \| x \| \| T \|$．//
• $\| TS \| \leqq \| T \| \| S \| \ (T,\, S \in \mathcal{L}(V)$.
$\because$ $\| x \| \leqq 1$ のとき，$\| TSx \| \leqq \| T \| \| Sx \| \leqq \| T \| \| S \| \| x \| \leqq \| T \| \| S \|$．//
次に $T \in \mathcal{L}(V)$ とする．$\forall y \in V$ に対して，$V \ni x \mapsto \langle Tx \,|\, y \rangle$ は明らかに線型形式．
ゆえに，$\exists 1 z \in V$ s.t. $\langle Tx \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, z \rangle \ (\forall x \in V)$.
y に対してこの z を対応させる作用素を ${}^tT$ で表す：

$$z = {}^tTy,\ \text{すなわち，}\langle Tx \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, {}^tTy \rangle \ (\forall x, y \in V).$$

明らかに ${}^tT$ も V 上の線型作用素．すなわち ${}^tT \in \mathcal{L}(V)$.
• ${}^t({}^tT) = T$.
$\because$ $\langle x \,|\, {}^t({}^tT)y \rangle = \langle {}^tTx \,|\, y \rangle = \langle y \,|\, {}^tTx \rangle = \langle {}^tTy \,|\, x \rangle$.

• $\langle Tx \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, {}^tTy \rangle$ より，正規直交基底 $e_1, \dots, e_n$ に関する T の表示行列を (τ_{ij}) とすると，${}^tT$ の表示行列はその転置行列 ${}^t(\tau_{ij})$ である．

補題 3.1.　$T \in \mathcal{L}(V)$ のとき，$\| {}^tT \| = \| T \|$.

証明.　$\| x \| \leqq 1$ のとき，

$$\| Tx \|^2 = \langle Tx \,|\, Tx \rangle = \langle x \,|\, {}^tTTx \rangle \leqq \| x \| \| {}^tTTx \| \leqq \| {}^tTT \| \| x \| \leqq \| {}^tT \| \| T \|.$$

ゆえに $\| T \| \leqq \| {}^tT \|$．これを ${}^tT$ に適用すると，$\| {}^tT \| \leqq \| {}^t({}^tT) \| = \| T \|$ となって，逆向きの不等号も得るので，証明終わり．　□

$GL(V)$：V の可逆な線型作用素の全体.

各 $T \in \mathcal{L}(V)$ に対して，$\det T$ とは，T の正規直交基底に関する T の表示行列の行列式のこと．これは正規直交基底の取り方によらず定まる．このとき，

$$GL(V) = \{T \in \mathcal{L}(V) \,;\, \det T \neq 0\}.$$

とくに，$GL(V)$ は $\mathcal{L}(V)$ の開集合である．

• $GL(V)$ は写像の合成に関して群をなす：

　単位元 = 恒等作用素，$T \in GL(V)$ の逆元は T の逆作用素 T^{-1}.

• 正規直交基底を固定，それに関する $T, S \in GL(V)$ の表示行列を (τ_{ij})，(σ_{ij}).

(1) TS の行列表示の (i, j) 成分 $= \sum_{k=1}^{n} \tau_{ik}\sigma_{kj}$．とくに σ_{ij} と τ_{ij} の多項式.

(2) T^{-1} の表示行列は $\dfrac{1}{\det T} \times$（T の余因子行列）．したがって各成分は，

　$\dfrac{1}{\det T} \times$（τ_{ij} の多項式）という形.

ゆえに群演算

$$GL(V) \times GL(V) \ni (T, S) \mapsto TS \in GL(V), \quad GL(V) \ni T \mapsto T^{-1} \in GL(V)$$

は C^∞ 写像（実解析的写像でもある）．$\rightsquigarrow$ $GL(V)$ は **Lie 群**である.

以下，Ω を V の正則開凸錐とする.

定義 3.2.　$GL(\Omega) := \{g \in GL(V) \,;\, g(\Omega) = \Omega\}$.

$GL(\Omega)$ を Ω の線型自己同型群と呼ぶ.

• $GL(\Omega) = \{g \in GL(V) \,;\, g(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega}\}$ とも書けるから，$GL(\Omega)$ は $GL(V)$ の閉部分群になっている； $g_n \in GL(\Omega)$ $(n = 1, 2, \dots)$，$g_n \to g \in GL(V)$ ならば，$g \in GL(\Omega)$.

ここで，$g_n^{-1} = \dfrac{1}{\det g_n} \times$（$g_n$ の余因子行列）$\to \dfrac{1}{\det g} \times$（$g$ の余因子行列）に注意.

したがって，$GL(\Omega)$ 自身 Lie 群になっている（**線型 Lie 群**という）.

定義 3.3. Ω が等質 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $GL(\Omega)$ が Ω に推移的に働く．すなわち

$$\forall x, y \in \Omega, \quad \exists g \in GL(\Omega) \ \text{ s.t. } \ gx = y.$$

命題 3.4. $GL(\Omega^*) = {}^tGL(\Omega) := \{{}^tg \ ; \ g \in GL(\Omega)\}$.

証明. まず包含関係 $\supset$ を示そう．$g \in GL(\Omega)$，$y \in \Omega^*$ とする．$\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して $gx \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ であるから，$\langle {}^tgy \,|\, x \rangle = \langle y \,|\, gx \rangle > 0$．ゆえに ${}^tgy \in \Omega^*$ となって，${}^tg(\Omega^*) \subset \Omega^*$ が示せた．ここで g の代わりに g^{-1} を用いて，$({}^tg)^{-1} = {}^t(g^{-1})$ に注意すると，逆向きの包含関係もわかるので，${}^tg(\Omega^*) = \Omega^*$ を得る．ゆえに ${}^tg \in GL(\Omega^*)$．すなわち ${}^tGL(\Omega) \subset GL(\Omega^*)$．以上の議論を Ω^* に適用して，${}^tGL(\Omega^*) \subset GL(\Omega^{**}) = GL(\Omega)$．これは $GL(\Omega^*) \subset {}^tGL(\Omega)$ を意味する．よって $GL(\Omega^*) = {}^tGL(\Omega)$． $\square$

各 $a \in \Omega$ に対して，$GL(\Omega)_a := \{g \in GL(\Omega) \ ; \ ga = a\}$．
$GL(\Omega)_a$ は $GL(\Omega)$ の閉部分群である．$GL(\Omega)$ における a の固定部分群と呼ぶ．

命題 3.5. $GL(\Omega)_a$ は $GL(\Omega)$ のコンパクトな部分群である．

証明には次の補題が必要である．$a \in V$ に対して，$a - \Omega = \{a - x \ ; \ x \in \Omega\}$．

補題 3.6. $a \in \Omega$ とするとき，$\Omega \cap (a - \Omega)$ は空でない有界な開集合である．

証明. $\frac{1}{2}a \in \Omega \cap (a - \Omega)$ ゆえ，$\Omega \cap (a - \Omega) \neq \varnothing$ は空でない開集合．有界であることを示そう．$\Omega^* \neq \varnothing$ より，$y_0 \in \Omega^*$ を固定しよう．容易に

$$\Omega \cap (a - \Omega) \subset \{x \in \Omega \ ; \ 0 < \langle y_0 \,|\, x \rangle < \langle y_0 \,|\, a \rangle\}.$$

$S := \{x \in V \ ; \ \| x \| = 1\}$ とし，$\delta := \min\limits_{x \in \overline{\Omega} \cap S} \langle y_0 \,|\, x \rangle > 0$ とおくと，$\langle y_0 \,|\, x \rangle \geqq \delta \| x \|$ が，任意の $x \in \overline{\Omega}$ で成り立っている ($x = 0$ でも OK)．ゆえに，$x \in \Omega \cap (a - \Omega)$ ならば $\| x \| \leqq \dfrac{1}{\delta} \langle y \,|\, x \rangle < \dfrac{1}{\delta} \langle y \,|\, a \rangle$ となって，$\Omega \cap (a - \Omega)$ は有界集合である． $\square$

命題 3.6 の証明 $C := \Omega \cap (a - \Omega)$ とおくと，C は空でない有界開集合である．そして，$GL(\Omega)_a$ は C を不変にする．したがって $x_0 \in C$ を固定し，$r_0 > 0$, $R_0 > 0$ をとって，$\overline{B(x_0, r_0)} \subset C \subset B(0, R_0)$ としておくと

$$GL(\Omega)_a\bigl(\overline{B(x_0, r_0)}\bigr) \subset B(0, R_0).$$

任意に $g \in GL(\Omega)_a$ をとる．任意の $x \in V$ ($\| x \| \leqq 1$) に対して，$x_0 + r_0 x \in \overline{B(x_0, r_0)}$ であるから，$\| gx_0 + r_0 gx \| \leqq R_0$．そして $\| gx_0 \| \leqq R_0$ でもあるから

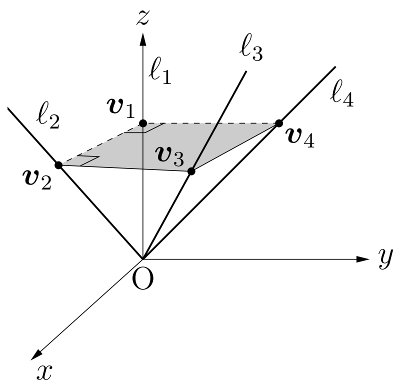
$$r_0 \| gx \| \leqq \| r_0 gx + gx_0 \| + \| gx_0 \| \leqq R_0 + R_0 = 2R_0.$$

よって，$\| gx \| \leqq 2r_0^{-1} R_0$ となるので，$\| g \| \leqq 2r_0^{-1} R_0$．これは $GL(\Omega)_a$ が有界集合であることを示している．$GL(\Omega)_a$ が閉集合であることは明らか． $\square$

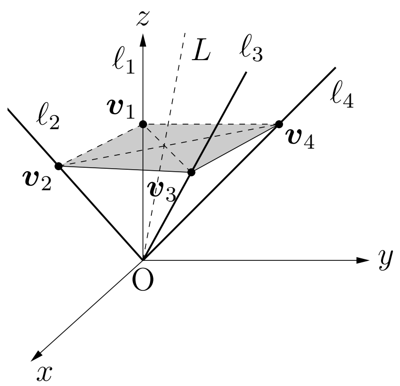
例 3.7. 前回の開角錐は等質でないことを示そう．次の 4 個のベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で生成さされる角錐 $\Omega := \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle_+$ を考えた．



$\ell_j := \mathbb{R}_{>0}\, \boldsymbol{v}_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$：$\overline{\Omega}$ の母線．
$\forall g \in GL(\Omega)$ とする．g は可逆な線型作用素ゆえ，ℓ_i と ℓ_j $(i \neq j)$ が張る平面を原点を通る平面に写す．母線は二つの境界面の交線であるので，g は母線間の置換を引き起こすが，Ω を不変にすることから，隣りあう母線は隣り合う母線に移る．したがって，ℓ_1 の行き先の母線を指定すると，その隣にしか ℓ_2，ℓ_4 は来ない．よって ℓ_3 の行き先は決まってしまう．



π：ℓ_1 と ℓ_3 が張る平面，π'：ℓ_2 と ℓ_4 が張る平面．
L：π と π' の交線の一部である Ω 内の半直線．
g により，π と π' は互換される可能性があるが，L は不変になる．言い換えれば，g によって，L 上の点は L 以外の所には写らない．よってこの例の Ω は等質ではない．

§4. 等質開凸錐の例

例 4.1 (**Lorentz 錐**). $n \geqq 2$ とする.

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 > 0,\ x_1 > 0\}.$$

Ω は開凸錐で, $\mathbb{R}^n$ の標準内積で $\Omega^* = \Omega$.

以下 Ω は等質であることを示そう.

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad [\, x \,,\, y \,] := {}^t x J y \quad (x, y \in \mathbb{R}^n) \quad \cdots\cdots \text{①}$$

とおくと, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, [\, x \,,\, x \,] > 0,\ x_1 > 0\}$ と書ける.

$$O(1, n-1) := \{g \in GL(n, \mathbb{R}) \,;\, [\, gx \,,\, gy \,] = [\, x \,,\, y \,]\ (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\}$$

を考える. ①より $O(1, n-1) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) \,;\, {}^t g J g = J\}$ でもある. $O(1, n-1)$ が群をなすことは明らかであろう. また $GL(n, \mathbb{R})$ の閉部分群であるから, 線型 Lie 群である.

補題 4.2. ${}^t g J g = J \iff g J {}^t g = J$.

証明. $J^2 = I$ より, ${}^t g J g = J$ に右から J をかけて ${}^t g J g J = I$ を得る. ゆえに ${}^t g J = (gJ)^{-1}$. よって $g J {}^t g J = I$. この両辺に右から J をかけて $g J {}^t g = J$ となる. 逆向きも同様. □

$O(1, n-1)$ は連結成分を 4 個持つことが知られている[1].

単位元の連結成分を $SO_0(1, n-1)$ とすると (再び同書を参照)

$$SO_0(1, n-1) = \{g \in O(1, n-1) \,;\, \det g = 1,\ g_{11} \geqq 1\}.$$

補題 4.3. $SO_0(1, n-1) \subset GL(\Omega)$.

証明. $g \in SO_0(1, n-1)$ とする. 補題4.2 より, $g J {}^t g = J$ である. この両辺の $(1,1)$ 成分を比べると, $g_{11}^2 - \sum\limits_{k=2}^{n} g_{1k}^2 = 1$. さて $x \in \Omega$ とする. gx の第 1 成分 $(gx)_1$ は

$$(gx)_1 = \sum_{k=1}^{n} g_{1k} x_k = g_{11} x_1 + \sum_{k=2}^{n} g_{1k} x_k.$$

Schwarz の不等式から

$$\left| \sum_{k=2}^{n} g_{1k} x_k \right| \leqq \left(\sum_{k=2}^{n} g_{1k}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=2}^{n} x_k^2 \right)^{1/2} < \sqrt{g_{11}^2 - 1} \cdot x_1 < g_{11} x_1$$

[1] 例えば, 山内恭彦・杉浦光夫：連続群論入門参照. $O(3,1)$ で書かれてあるが, 証明はそのまま一般の n で通用する.

がわかるので，$(gx)_1 > 0$ である．ゆえに $g(\Omega) \subset \Omega$．そして g^{-1} を考えれば逆向きの包含関係も出るので $g(\Omega) = \Omega$ を得る．ゆえに $g \in GL(\Omega)$ である． □

以下，$G := \mathbb{R}_{>0} \times SO_0(1, n-1)$ とおく．ただし $\mathbb{R}_{>0}$ は正数倍という演算で Ω に働くものとする．明らかに $G \subset GL(\Omega)$ である．
さて，次の行列 u, h_t は，いずれも $SO_0(1, n-1)$ に属することが容易に確かめられる．

$$u := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{u} \end{pmatrix} \qquad \text{（ただし，}\widetilde{u} \in SO(n-1, \mathbb{R})\text{），}$$

$$h_t := \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & I_{n-2} & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix} \qquad \text{（ただし，}t \in \mathbb{R}\text{，}I_{n-2}\text{ は }n-2\text{ 次単位行列）．}$$

定理 4.4. G は Ω に推移的に働く．したがって Ω は等質である．

証明. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \Omega$ を考えて，任意に $x \in \Omega$ が与えられたとき，$g \in G$ を見つけて，$x = ge_1$ とできればよい．まず，$[\,x\,,\,x\,] > 0$ であるから，$\lambda := \sqrt{[\,x\,,\,x\,]}$ とおくと，$x = \lambda y$ かつ $[\,y\,,\,y\,] = 1$ である．次に，$r := \sqrt{y_2^2 + \cdots + y_n^2}$ とおくと，$\widetilde{u} \in SO(n-1, \mathbb{R})$ を見つけてきて，

$$\widetilde{u} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

とできる．$y_1^2 - r^2 = [\,y\,,\,y\,] = 1$，$y_1 > 0$ より，$\exists t \geqq 0$ s.t. $y_1 = \cosh t,\ r = \sinh t$．このとき，$x = \lambda u h_t e_1$ となっている． □

例 4.5. 正定値実対称行列のなす開凸錐
$V := \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$：$n$ 次実対称行列のなすベクトル空間．
$\Omega := \{x \in V\ ;\ x \gg 0\}$．すなわち，$\Omega$ は n 次正定値実対称行列のなす開凸錐．
V に内積 $\langle\, x \,|\, y \,\rangle := \mathrm{Tr}(xy)$ を入れることで $\Omega^* = \Omega$ である．
各 $T \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ に対して，V 上の線型作用素 $\rho(T) = \rho_n(T)$ を

$$\rho(T)x = Tx\,{}^tT \qquad (x \in V)$$

で定義する．$g \in GL(n, \mathbb{R})$ なら明らかに $\rho(g) \in GL(\Omega)$．
n 次単位行列を I_n と書く．$I_n \in \Omega$ である．

定理 4.6. Ω は等質である．

証明. 2 種類の証明をする．いずれも任意の $x \in \Omega$ が，適当な $g \in GL(n,\mathbb{R})$ を用いて，$x = g\,{}^t g = \rho(g) I_n$（$I_n$ は n 次単位行列）と書けることを示すものである．

(1) $\forall x \in \Omega$ は正定値な平方根 $x^{1/2}$ を持つ．$x^{1/2} \in GL(n,\mathbb{R})$ ゆえ $\rho(x^{1/2}) \in GL(\Omega)$ を考えると，$x^{1/2}$ は対称行列ゆえ，$\rho(x^{1/2}) I_n = x^{1/2} I_n x^{1/2} = x$ となる．

(2) $x \in \Omega$ とし，$\mathbb{R}^n$ 上の正定値 2 次形式

$$Q_x(\xi) := \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}\xi_i\xi_j = \langle\, x\xi \,|\, \xi \,\rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

を考えて，これを ξ_1 の 2 次式と見て次のように表す．

$$Q_x(\xi) = x_{11}\xi_1^2 + 2\sum_{j=1}^{n} x_{1j}\xi_j\xi_1 + Q'(\xi').$$

ただし $Q'(\xi')$ は $\xi' := {}^t(\xi_2,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$ の 2 次形式．ここで $x_{11} = \langle\, xe_1 \,|\, e_1 \,\rangle_{\mathbb{R}^n} > 0$ に注意して平方完成をすると，次の形になる．

$$Q_x(\xi) = \left(\sqrt{x_1}\xi_1 + \sum_{j=2}^{n}\frac{x_{1j}}{\sqrt{x_{11}}}\xi_j\right)^2 + Q_1'(\xi') = \eta_1^2 + Q_1'(\xi'). \quad \cdots\cdots ②$$

ただし，

$$\eta_1 := \alpha\xi_1 + {}^t\beta\xi', \quad \alpha := \sqrt{x_{11}}, \quad {}^t\beta = (\beta_2,\dots,\beta_n), \quad \beta_j := \frac{x_{1j}}{\sqrt{x_{11}}}$$

とおいた．Q_1' の行列を y とすると，

$$Q_x(\xi) = (\eta_1, {}^t\xi_1')\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \xi_1'\end{pmatrix} = {}^t\!\left(\begin{pmatrix}\alpha & {}^t\beta\\ 0 & I_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi'\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & {}^t\beta\\ 0 & I_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi'\end{pmatrix}$$

であるから，これは x が次のように書かれることを意味する：

$$x = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \beta & I_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & {}^t\beta\\ 0 & I_{n-1}\end{pmatrix}.$$

また②より，$Q_1'(\xi')$ は $\mathbb{R}^{n-1}$ 上の正定値の 2 次形式になる．ゆえに y は $n-1$ 次正定値対称行列である．n に関する帰納法で，下三角行列 $T \in GL(n,\mathbb{R})$ を見つけてきて，$x = T\,{}^tT = \rho(T) I_n$ となることがわかる． □

例 4.7. **Vinberg 錐**

自己双対でない等質開凸錐，すなわち，どのように内積を定義してもその内積に関して自己双対にならない等質開凸錐の例（1960 年に Vinberg が挙げた開凸錐で，最

低次元の 5 次元のもの[2]).

$$V := \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_4 \\ v_2 & v_3 & 0 \\ v_4 & 0 & v_5 \end{pmatrix} \;;\; v_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, \ldots, 5) \right\} \subset \mathrm{Sym}(3, \mathbb{R}).$$

V には $\mathrm{Sym}(3, \mathbb{R})$ からの内積を入れる.

$$\langle\, v \,|\, v' \,\rangle := \mathrm{Tr}(vv') \qquad (v, v' \in V).$$

考える開凸錐は

$$\Omega := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \;;\; x_1 > 0,\ x_1x_3 - x_2^2 > 0,\ x_1x_5 - x_4^2 > 0 \right\}.$$

この Ω を **Vinberg 錐**と呼ぶ.

定理 4.8. Ω は等質である.

証明. $x \in V$ に対して，$x^{(1)} := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$，$x^{(2)} := \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_4 & x_5 \end{pmatrix}$ とおき，$i = 1, 2$ に対して，$g_i := \begin{pmatrix} a & 0 \\ b_i & c_i \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$，$a > 0$，$c_i > 0\ (i = 1, 2)$ とするとき，
$g \in GL(V)$ を，$(gx)^{(i)} := g_i x^{(i)}\, {}^t g_i\ (i = 1, 2)$ で定義し，以下 $g = (g_1, g_2)$ と表す.
直接の計算で

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_4 & x_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

の $(1, 1)$ 成分はともに $a^2 x_1$ であることがわかるから，g は well-defined で,

$$x \in \Omega \implies x^{(1)} \gg 0,\, x^{(2)} \gg 0 \implies (gx)^{(1)} \gg 0,\, (gx)^{(2)} \gg 0$$

であるから，$g \in GL(\Omega)$ である．推移性については $g_i\, {}^t g_i = \begin{pmatrix} a^2 & ab_i \\ ab_i & b_i^2 + c_i^2 \end{pmatrix}$ に注意.
したがって，$y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ y_2 & y_3 & 0 \\ y_4 & 0 & y_5 \end{pmatrix} \in \Omega$ が与えられたとき,

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab_1 \\ ab_1 & b_1^2 + c_1^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_4 \\ y_4 & y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab_2 \\ ab_2 & b_2^2 + c_2^2 \end{pmatrix}$$

を解くことになる．a, b_1, b_2, c_1, c_2 が一意的に次のように解ける.

$$a = \sqrt{y_1}, \quad b_1 = \frac{y_2}{\sqrt{y_1}}, \quad c_1 = \frac{\sqrt{y_1y_3 - y_2^2}}{\sqrt{y_1}}, \quad b_2 = \frac{y_4}{\sqrt{y_1}}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{y_1y_5 - y_4^2}}{\sqrt{y_1}}. \qquad \square$$

---

[2]後年，Vinberg の理論により，11 次元以上では，互いに線型同値ではない非自己双対な等質開凸錐は連続濃度あることが示されている.

定理 4.9. $\Omega^* = \{y \in V \ ; \ y \gg 0\}$ である.

補題 4.10. 一般に Ω が等質なら Ω^* も等質である. (証明は次章)

証明. まず, $E := I_3$ とすると $E \in \Omega^*$ である. 実際, $\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して,

$$\langle\, E \,|\, x \,\rangle = \mathrm{Tr}\, x = x_1 + x_3 + x_5.$$

$x^{(1)}$ も $x^{(2)}$ も半正定値であるから, $x_1, x_3, x_5 \geqq 0$. ゆえに $\langle\, E \,|\, x \,\rangle \geqq 0$. 等号が成立するなら, $x_1 = x_3 = x_5 = 0$. ここで, $x_1x_3 - x_2^2 \geqq 0$, $x_1x_5 - x_4^2 \geqq 0$ より, $x_2 = x_4 = 0$ も出るが, これは $x = 0$ を意味する.

定理の証明は, 補題と $GL(\Omega^*) = {}^t GL(\Omega)$ により, $\Omega^* = {}^t GL(\Omega)E$ を示すことで終わる. したがって, $g = (g_1, g_2) \in GL(\Omega)$ の共役作用素を求めることが最初の仕事である.

補題 4.11. $\mathrm{Sym}(n, R)$ 上の線型作用素 $\rho_n(T)$ $(T \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}))$ のトレース内積 $\langle\, X \,|\, Y \,\rangle := \mathrm{Tr}(XY)$ に関する共役作用素 ${}^t\rho_n(T)$ は $\rho_n({}^tT)$ に等しい.

証明. $X, Y \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ とすると

$$\langle\, \rho_n(T)X \,|\, Y \,\rangle = \mathrm{Tr}(TX\,{}^tTY) = \mathrm{Tr}(X\,{}^tTYT) = \langle\, X \,|\, \rho_n({}^tT)Y \,\rangle \quad (X \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})).$$

より, 結論が従う. □

さて, 次の分解に注意する.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}. \quad \cdots\cdots ③$$

$g_1 = g_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $g_a := (g_1, g_2)$ の $v \in V$ への作用は対角的であって,

$$v_1 \mapsto a^2 v_1, \quad v_2 \mapsto av_2, \quad v_3 \mapsto v_3, \quad v_4 \mapsto av_2, \quad v_5 \mapsto v_5$$

また一般に, $T \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ のとき

$$\left(\begin{array}{c|c} T & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline (0,\ 0) & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} X & \begin{pmatrix} v_4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline (v_4,\ 0) & v_5 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} {}^tT & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline (0,\ 0) & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} TX\,{}^tT & T\begin{pmatrix} v_4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline (v_4,\ 0)\,{}^tT & v_5 \end{array}\right).$$

ゆえに $T = {}^tT = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすることで, ${}^tg = \rho_3\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ で表されることがわかる.

さらに $T = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ の形であれば, $T\begin{pmatrix} v_4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ゆえ, V 上の変換としては

$$\rho_3\left(\left(\begin{smallmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \rho_2(T) \oplus I \qquad (V = (\mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2 \oplus \mathbb{R}v_3) \oplus (\mathbb{R}v_4 \oplus \mathbb{R}v_5) \text{ と見て})$$

となっていることがわかる．したがって，$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ のとき，$g = (g_1, I)$ の共役作用素 ${}^t g$ は $\rho_3 \left(\left(\begin{smallmatrix} {}^t g_1 & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{smallmatrix} \right) \right)$ で与えられることがわかる．

$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ のときの $g(I, g_2)$ についても，同様にして ${}^t g$ が

$$\rho_3 \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \qquad \rho_3 \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \right)$$

で与えられることがわかる．

ここで行列の分解

$$\begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と③を比べて，${}^t g g' = {}^t g' \, {}^t g$ に注意すれば，$\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \right)$ の共役作用素が $\rho_3 \left(\left(\begin{smallmatrix} a & b_1 & b_2 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \right)$ で与えられることがわかる．そして $E = I_3$ の軌道は，

$$\begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b_1 & c_1 & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b_1^2 + b_2^2 & b_1 c_1 & b_2 c_2 \\ b_1 c_1 & c_1^2 & 0 \\ b_2 c_2 & 0 & c_2^2 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ④$$

で，右辺は $y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ y_2 & y_3 & 0 \\ y_4 & 0 & y_5 \end{smallmatrix} \right) \in V$ で $y \gg 0$ である任意のものになり得る．実際，④が y に等しいとすると，a, b_i, c_i が一意的に解けて，

$$c_1 = \sqrt{y_3}, \quad c_2 = \sqrt{y_5}, \quad b_1 = \frac{y_2}{\sqrt{y_3}}, \quad b_2 = \frac{y_4}{\sqrt{y_5}},$$

$$a = \frac{\sqrt{y_1 y_3 y_5 - y_2^2 y_5 - y_4^2 y_3}}{\sqrt{y_3 y_5}} = \frac{\sqrt{\det y}}{\sqrt{y_3 y_5}}$$

となる． □

§5. 開凸錐の特性函数

V：有限次元実ベクトル空間で，内積 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ を持つ． $\|x\| := \sqrt{\langle x\,|\,x\rangle}$.

dx： 正規直交基底を固定して V を $\mathbb{R}^{\dim V}$ とみたときの $\mathbb{R}^{\dim V}$ の Lebesgue 測度.

Lebesgue 測度は直交変換で不変なので，dx は正規直交基底の取り方によらない.

Ω：V の正則開凸錐，　$\Omega^* \neq \varnothing$：$\Omega$ の双対凸錐.

定義 5.1.　$x \in \Omega$ に対して

$$\phi(x) := \int_{\Omega^*} e^{-\langle x\,|\,y\rangle}\,dy.$$

Ω 上の函数 ϕ を Ω の特性函数と呼ぶ（とりあえず $+\infty$ も許しての定義である）.

命題 5.2.　$\phi(x)$ を定義する積分は，x が Ω のコンパクト集合にとどまるとき，一様に絶対収束する．さらに ϕ は C^∞ であって，

$$\phi(gx) = |\det g|^{-1}\,\phi(x) \qquad (x \in \Omega,\ g \in GL(\Omega)). \tag{5.1}$$

証明.　K：Ω のコンパクト部分集合.

$$\varepsilon := \min\{\langle x\,|\,y\rangle\,;\ x \in K,\ y \in \overline{\Omega^*},\ \|y\| = 1\} > 0.$$

そうすると，$x \in K, y \in \Omega^*$ のとき，$\langle x\,|\,y\rangle \geqq \varepsilon\|y\|$．ゆえに $0 < e^{-\langle x\,|\,y\rangle} \leqq e^{-\varepsilon\|y\|}$ となるから，積分は $x \in K$ に関して一様に絶対収束する．函数 ϕ が C^∞ であることもほぼ同様（積分記号下の微分：詳細略）．そして $x \in \Omega$，$g \in GL(\Omega)$ のとき

$$\begin{aligned}\phi(gx) &= \int_{\Omega^*} e^{-\langle gx\,|\,y\rangle}\,dy = \int_{\Omega^*} e^{-\langle x\,|\,{}^t g y\rangle}\,dy \\ &= \int_{\Omega^*} e^{-\langle x\,|\,y\rangle}\,|\det {}^t g|^{-1}\,dy = |\det g|^{-1}\,\phi(x)\end{aligned}$$

となって，証明終わり．　□

以下，なめらかな函数に対して，D_u $(u \in V)$ は，その u 方向の微分を表す：

$$D_u f(x) := \frac{d}{dt} f(x + tu)\Big|_{t=0}.$$

命題 5.3.　各 $x \in \Omega$ に対して，

$$\sigma_x(u, v) := D_u D_v \log\phi(x) \qquad (u, v \in V)$$

とおくとき，$(u, v) \mapsto \sigma_x(u, v)$ は正定値な対称双一次形式で，$GL(\Omega)$ 不変になっている： $\sigma_{gx}(gu, gv) = \sigma_x(u, v)$ $(g \in GL(\Omega))$.

証明.　$\sigma_x(u, v)$ が対称な双一次形式であることは $\log\phi$ がなめらかなことによる．正定値であることを示そう．$u \in V$ のとき

$$D_u \log\phi(x) = \frac{D_u\phi(x)}{\phi(x)} = -\frac{1}{\phi(x)} \int_{\Omega^*} e^{-\langle x\,|\,y\rangle}\langle u\,|\,y\rangle\,dy. \tag{5.2}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} D_u^2 \log\phi(x) &= -\frac{1}{\phi(x)^2}\left(\int_{\Omega^*} e^{-\langle\, x \,|\, y \,\rangle}\langle\, u \,|\, y \,\rangle\, dy\right)^2 + \frac{1}{\phi(x)}\int_{\Omega^*} e^{-\langle\, x \,|\, y \,\rangle}\langle\, u \,|\, y \,\rangle^2\, dy \\ &= \frac{1}{\phi(x)^2}\left\{\left(\int_{\Omega^*} e^{-\langle\, x \,|\, y \,\rangle}\, dy\right)\left(\int_{\Omega^*} e^{-\langle\, x \,|\, y \,\rangle}\langle\, u \,|\, y \,\rangle^2\, dy\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. -\left(\int_{\Omega^*} e^{-\langle\, x \,|\, y \,\rangle}\langle\, u \,|\, y \,\rangle\, dy\right)^2\right\} \geqq 0. \end{aligned}$$

最後は Schwarz の不等式による．ここで $u \neq 0$ のとき，2 個の函数 $y \mapsto e^{-\langle\, x \,|\, y \,\rangle/2}$ と $y \mapsto e^{-\langle\, x \,|\, y \,\rangle/2}\langle\, u \,|\, y \,\rangle$ は 1 次独立．したがって Schwarz の不等式で等号は成立しない．よって

$$\sigma_x(u,u) = D_u^2 \log\phi(x) > 0 \qquad (u \neq 0).$$

さて $g \in GL(\Omega)$ は線型に作用しているから，ψ が滑らかな函数であるとき，

$$\big((D_{gu}\psi)\circ g\big)(x) = (D_{gu}\psi)(gx) = \frac{d}{dt}\psi(gx + tgu)\Big|_{t=0} = D_u(\psi\circ g)(x).$$

したがって，$(D_{gu}D_{gv}\psi)\circ g = D_u(D_{gv}\psi\circ g) = D_uD_v(\psi\circ g)$．ゆえに

$$\begin{aligned} \sigma_{gx}(gu,gv) &= (D_{gu}D_{gv}\log\phi)(gx) = D_uD_v((\log\phi)\circ g)(x) \\ &= D_uD_v\log\phi(x) \qquad (\because \phi(gx) = |\det g|^{-1}\phi(x)) \\ &= \sigma_x(u,v) \end{aligned}$$

となって，証明終わり． □

f を Ω 上のなめらかな函数とする．各 $x \in \Omega$ において，$V \ni u \mapsto D_uf(x)$ は線型形式ゆえ，$\exists 1 \nabla f(x) \in V$ s.t.

$$D_uf(x) = \langle\, \nabla f(x) \,|\, u \,\rangle \qquad (\forall u \in V).$$

(座標を使わない ∇f の定義)．

定義 5.4. $x \in \Omega$ に対して，$x^* := -\nabla\log\phi(x) \in V$ とおく．

$\nabla\log\phi(x)$ の定義と (5.2)より，$u \in V$ に対して

$$\langle\, x^* \,|\, u \,\rangle = \frac{1}{\phi(x)}\int_{\Omega^*}\langle\, u \,|\, y \,\rangle e^{-\langle\, x \,|\, y \,\rangle}\, dy = \left\langle \frac{1}{\phi(x)}\int_{\Omega^*} y\, e^{-\langle\, x \,|\, y \,\rangle}\, dy \,\middle|\, u \right\rangle. \qquad (*)$$

二つ目の等号は，積分を Riemann 和で書いて内積の線型性と連続性による．ゆえに

$$x^* = \frac{1}{\phi(x)}\int_{\Omega^*} y\, e^{-\langle\, x \,|\, y \,\rangle}\, dy = \frac{\displaystyle\int_{\Omega^*} y\, e^{-\langle\, x \,|\, y \,\rangle}\, dy}{\displaystyle\int_{\Omega^*} e^{-\langle\, x \,|\, y \,\rangle}\, dy}$$

である．後者は，x^* が密度関数 $e^{-\langle\, x \,|\, y \,\rangle}$ に関する Ω^* の重心であることを示している．Ω^* は凸であるから，$x^* \in \Omega^*$ であることがわかる．

定理 5.5. (1) $\langle x \,|\, x^* \rangle = \dim V$ $(\forall x \in \Omega)$.
(2) $x \mapsto x^*$ は Ω から Ω^* への bijection を与える（Vinberg の $*$ 写像という）.
(3) $(gx)^* = {}^t g^{-1} x^*$ $(g \in GL(\Omega),\, x \in \Omega)$.

証明. (1) (5.1)で $g = \lambda I$ $(\lambda > 0)$ として，$\phi(\lambda x) = \lambda^{-N}\phi(x)$ $(N := \dim V)$．この両辺で $\lambda = 1 + t$ とおくと，$\phi(x + tx) = (1+t)^{-N}\phi(x)$ となるから，両辺を t で微分してから $t = 0$ とおくと，$\langle x \,|\, \nabla\phi(x) \rangle = D_x\phi(x) = -N\phi(x)$．よって

$$\langle x \,|\, x^* \rangle = -\frac{1}{\phi(x)}\langle x \,|\, \nabla\phi(x) \rangle = N.$$

(2) $x^* \in \Omega^*$ はすでに示しているが，式でも示しておこう．$u \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ とすると，$(*)$ で $\langle u \,|\, y \rangle > 0$ より，$\langle x^* \,|\, u \rangle > 0$ となって，$x^* \in \Omega^*$.

$x \mapsto x^*$ が全単射であることの証明に次の補題が必要である.

補題 5.6. $x_n \in \Omega$ $(n = 1, 2, \ldots)$，かつ $x_n \to x_0 \in \partial\Omega \implies \phi(x_n) \to +\infty$.

証明. Ω^* は開集合ゆえ，$\overline{\Omega^*}$ の元からなる V の基底 $e_1, \ldots, e_N$ が存在する．さらに $x_0 \in \partial\Omega$ より，$\langle x \,|\, e_1 \rangle = 0$ としてよい（$\forall y \in \overline{\Omega^*} \setminus \{0\}$ に対して $\langle x_0 \,|\, y \rangle > 0$ なら，$x \in \Omega^{**} = \Omega$ となってしまう）．$u_1 \geqq 0, \ldots, u_N \geqq 0$ のとき，$\sum_{j=1}^N u_j e_j \in \overline{\Omega^*}$ ゆえ

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int_{\Omega^*} e^{-\langle x \,|\, y \rangle}\, dy \geqq c\int_0^{+\infty}\!\!\cdots\int_0^{+\infty} e^{-\langle x \,|\, \sum u_j e_j \rangle}\, du_1 \cdots du_N \\ &= c\prod_{j=1}^N \int_0^{+\infty} e^{-u_j\langle x \,|\, e_j \rangle}\, du_j = c\prod_{j=1}^N \frac{1}{\langle x \,|\, e_j \rangle}.\end{aligned}$$

ゆえに $\phi(x_n) \geqq c\prod_{j=1}^N \dfrac{1}{\langle x_n \,|\, e_j \rangle} \to +\infty$. □

定理 5.5 の証明に戻ろう．$\forall z \in \Omega^*$ とし，z を法線ベクトルとする超平面

$$H(z) := \{y \in V \,;\, \langle y \,|\, z \rangle = N\}$$

を考え，$Q_z := \Omega \cap H(z)$ とおく．まず発見的に $z = x^*$ $(x \in \Omega)$ ならば，x はどういう点かを調べてみよう．まず $\langle x \,|\, z \rangle = \langle x \,|\, x^* \rangle = N$ より，$x \in Q_z$ である．さらに $\forall u \in H(z)$ に対して

$$\begin{aligned}D_{u-x}\log\phi(x) &= \langle \nabla\log\phi(x) \,|\, u - x \rangle = -\langle x^* \,|\, u \rangle + \langle x^* \,|\, x \rangle \\ &= -\langle z \,|\, u \rangle + \langle x^* \,|\, x \rangle = -N + N = 0.\end{aligned}$$

ここで $u - x$ は x を始点とする $H(z)$ 上の任意のベクトルであるから，x は $(\log\phi)\big|_{Q_z}$ の停留点であることを示している．そして，命題 5.3 より $D_{u-x}^2 \log\phi > 0$ ゆえ $\log\phi$ は x で狭義の極小である．一方で，$\log\phi$ が $x_0 \in Q_z$（開集合）で最小値をとれば，

Lagrange の乗数法から，$\nabla \log \phi(x_0)$ は超平面 $H(z)$ の法線ベクトルと平行である．言い換えると

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ \text{ s.t. } \ x_0^* = -\nabla \log \phi(x_0) = \lambda z.$$

そして，$N = \langle\, x_0 \,|\, x_0^* \,\rangle = \lambda \langle\, x_0 \,|\, z \,\rangle = \lambda N$ より $\lambda = 1$ となって，$z = x_0^*$ である．したがって，$\log \phi$ が Q_z のただ 1 点で最小値をとることを示せばよい．まず $z \in \Omega^*$ ゆえ，$\delta := \min\limits_{u \in \overline{\Omega},\, \|\, u \,\| = 1} \langle\, u \,|\, z \,\rangle > 0$．よって $y \in Q_z$ ならば

$$N = \langle\, y \,|\, z \,\rangle = \|\, y \,\| \left\langle \frac{y}{\|\, y \,\|} \,\middle|\, z \right\rangle \geqq \delta \|\, y \,\|.$$

ゆえに $\|\, y \,\| \leqq \delta^{-1} N$ となって，Q_z は有界集合．したがって $\overline{Q_z}$ は有界閉集合．ゆえに $\log \phi$ は $\overline{Q_z}$ で最小値をとり，補題 5.6 よりそれは $\overline{Q_z}$ の内部 Q_z で起こる．

仮に $\log \phi$ が異なる 2 点 $x_1, x_2 \in Q_z$ で広義の極小値をとるとし，$\log \phi(x_1) \leqq \log \phi(x_2)$ とする．命題 5.3 より $\log \phi$ は Q_z で，したがって線分 $x_1 x_2$ 上で狭義凸函数となるから，線分 $x_1 x_2$ の内点では $\log \phi$ の値は $\log \phi(x_2)$ より小さい．これは $\log \phi(x_2)$ が広義の極小値であることに反する．

(3) 補題より

$$\begin{aligned}(gx)^* &= \frac{1}{\phi(gx)} \int_{\Omega^*} y e^{-\langle\, gx \,|\, y \,\rangle}\, dy = \frac{1}{\phi(x) |\det g\,|^{-1}} \int_{\Omega^*} y e^{-\langle\, x \,|\, {}^t g y \,\rangle}\, dy \\ &= \frac{1}{\phi(x)} \int_{\Omega^*} ({}^t g y) e^{-\langle\, x \,|\, y \,\rangle}\, dy = {}^t g \left(\int_{\Omega^*} y e^{-\langle\, x \,|\, y \,\rangle}\, dy \right)\end{aligned}$$

より証明終わり． □

命題 5.7. Ω が等質ならば Ω^* も等質．

証明． $y, y' \in \Omega^*$ とし，$x^* = y$，$(x')^* = y'$ となる $x, x' \in \Omega$ をとる．$gx = x'$ となる $g \in GL(\Omega)$ をとると，

$${}^t g^{-1} y = {}^t g^{-1} x^* = (gx)^* = (x')^* = y'^*.$$

$GL(\Omega^*) = {}^t GL(\Omega)$ ゆえ，証明終わり． □

§6. 開凸錐の特性函数（続き）

V：有限次元実ベクトル空間で，内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を持つ．$\| x \| := \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle}$.
dx： 正規直交基底を固定して V を $\mathbb{R}^{\dim V}$ とみたときの $\mathbb{R}^{\dim V}$ の Lebesgue 測度.
Lebesgue 測度は直交変換で不変なので，dx は正規直交基底の取り方によらない.
Ω：V の正則開凸錐，　$\Omega^* \neq \varnothing$：$\Omega$ の双対凸錐.
Ω の特性函数：　　$\phi(x) = \phi_\Omega(x) := \displaystyle\int_{\Omega^*} e^{-\langle x \,|\, y \rangle}\, dy \qquad (x \in \Omega)$.
Vinberg の $*$ 写像：　$x^* := -\nabla \log \phi(x)$. 写像 $\Omega \ni x \mapsto x^* \in \Omega^*$ は bijection (diffeo).

命題 6.1.　Ω は等質であるとする.
(1) $\phi_\Omega(x)\phi_{\Omega^*}(x^*) = \mathrm{const} \quad (x \in \Omega)$.
(2) $x^{**} = x \ (x \in \Omega)$.

証明.　(1) $g \in GL(\Omega)$ とすると

$$\phi_\Omega(gx)\phi_{\Omega^*}((gx)^*) = \phi_\Omega(gx)\phi_{\Omega^*}({}^t g^{-1} x^*) = \frac{\phi_\Omega(x)}{|\det g|}\frac{\phi_{\Omega^*}(x^*)}{|\det {}^t g|^{-1}} = \phi_\Omega(x)\phi_{\Omega^*}(x^*).$$

Ω は等質であるので，証明終わり.
(2) $\sigma_x(u,v) = D_u D_v \log \phi_\Omega(x)$ とし，正定値対称双線型形式 $\sigma_x(u,v)$ を内積で表す線型作用素を $H(x)$ と書く：$\sigma_x(u,v) = \langle H(x)u \,|\, v \rangle$.
$H(x)$ は自己共役 (${}^t H(x) = H(x)$) で正定値である．そして，

$$\sigma_x(u,v) = D_u \langle \nabla \log \phi_\Omega(x) \,|\, v \rangle = -D_u \langle x^* \,|\, v \rangle = -\langle D_u x^* \,|\, v \rangle$$

より，$H(x)u = -D_u x^*$ であり，したがって，$(x+tu)^* = x^* - tH(x)u + o(t)$ が写像 x^* の Taykor 展開になる．(1) より $\log \phi_\Omega(x) + \log \phi_{\Omega^*}(x^*) = \mathrm{const}$ ゆえ，両辺に D_u を作用させると，

$$0 = -\langle x^* \,|\, u \rangle + \langle x^{**} \,|\, H(x)u \rangle$$

一方，$\langle x \,|\, x^* \rangle = N$ に D_u を作用させて，

$$0 = \langle u \,|\, x^* \rangle + \langle x \,|\, D_u x^* \rangle = \langle u \,|\, x^* \rangle - \langle x \,|\, H(x)u \rangle.$$

ゆえに

$$\langle u \,|\, H(x)x^{**} \rangle = \langle u \,|\, x^* \rangle = \langle H(x)x \,|\, u \rangle.$$

$u \in V$ は任意ゆえ，$H(x)x^{**} = H(x)x$．作用素 $H(x)$ は可逆なので，$x^{**} = x$.　□

Ω が等質であれば，$\phi(gx) = |\det g|^{-1}\phi(x)$ を使って特性函数を容易に計算できる.

例 6.2.　以前に扱った Lorentz 錐を Ω とする：そこでの記号をそのまま使って，

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, [\,x\,,\,x\,] > 0,\ x_1 > 0\}, \quad [\,x\,,\,y\,] := {}^t x J y,\ J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{R}^n$ の標準内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を用いて，Ω の特性函数 ϕ を定義する．Ω が $\langle\cdot|\cdot\rangle$ で自己双対であることにも注意すると

$$\phi(x)=\int_\Omega e^{-\langle x\,|\,y\rangle}\,dy \qquad (x\in\Omega). \tag{6.1}$$

さて

$$u:=\begin{pmatrix}1&0\\0&\widetilde{u}\end{pmatrix}\quad(\widetilde{u}\in SO(n-1,\mathbb{R})),\qquad h_t:=\begin{pmatrix}\cosh t&0&\sinh t\\0&I_{n-2}&0\\\sinh t&0&\cosh t\end{pmatrix}\quad(t\in\mathbb{R})$$

とおくと，前章より，$x\in\Omega$ は $x=\lambda uh_te_1$ ($\lambda:=\sqrt{[\,x\,,\,x\,]}$) と表され，$\det u=1$, $\det h_t=1$ であるから，

$$\phi(x)=|\det\lambda I|^{-1}\phi(e_1)=[\,x\,,\,x\,]^{-n/2}\phi(e_1)=\phi(e_1)(x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2)^{-n/2}.$$

注意 6.3. $\phi(e_1)$ を具体的に求めることができる．Gamma 函数の積で表される．

例 6.4. ここでは，正定値実対称行列のなす開凸錐 Ω を考える：

$$\Omega:=\{x\in V:=\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})\ ;\ x\gg 0\}.$$

$\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ の内積 $\langle\,x\,|\,y\,\rangle=\mathrm{Tr}(xy)$ を用いて，式 (6.1)の形で，Ω の特性函数 ϕ を定義する．各 $g\in GL(n,\mathbb{R})$ に対して，$\rho(g)x:=gx\,{}^tg$ $(x\in V)$ で $\rho(g)\in GL(V)$ を定義する．任意の $x\in\Omega$ は $x=\rho(g)I_n=g\,{}^tg$ $(g\in GL(n,\mathbb{R}))$ となるのであるから，$\phi(x)=|\det\rho(g)|^{-1}\phi(I_n)$．さて $\det x=(\det g)^2$ であり，次の補題 6.5 より $|\det\rho(g)|=|\det g|^{n+1}$ であるから，$|\det\rho(g)|=(\det x)^{(n+1)/2}$ である．ゆえに $\phi(x)=\phi(I_n)(\det x)^{-(n+1)/2}$．

補題 6.5. $|\det\rho(g)|=|\det g|^{n+1}\quad(g\in GL(n,\mathbb{R}))$.

証明. 証明には，行列の極分解を用いるのが良いだろう．任意の $t\in GL(n,\mathbb{R})$ は一意的に，$g=uh$（$u\in O(n,\mathbb{R})$，h は正定値実対称行列）と表される[1]．実際は，$h=({}^tgg)^{1/2}$，$u=g({}^tgg)^{-1/2}$ という形で表される[2]．次に h を $u'\in O(n,\mathbb{R})$ で対角化して，$h=u'd\,{}^tu'$，$d=\mathrm{diag}[\,d_1,\dots,d_n\,]$ $(d_1>0,\dots,d_n>0)$ とする．したがって，$u_1,u_2\in O(n,\mathbb{R})$ により，$g=u_1du_2$ と表される．

(1) $u\in O(n,\mathbb{R})$ のとき，$\rho(u)$ は直交変換である．すなわち $|\det\rho(u)|=1$.

$$\because\ \langle\,\rho(u)x\,|\,\rho(u)y\,\rangle=\mathrm{Tr}\big((ux\,{}^tu)(uy\,{}^tu)\big)=\mathrm{Tr}(uxy\,{}^tu)=\mathrm{Tr}(xy)=\langle\,x\,|\,y\,\rangle.$$

(2) $d=\mathrm{diag}[\,d_1,\dots,d_n\,]$ のとき，$\rho(d)x=dxd$ の (i,j) 成分は $d_id_jx_{ij}$ である．ゆえに，$\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ の標準的な基底 $E_{ii},E_{ij}+E_{ji}$ $(i<j)$（E_{ij} は行列単位：(i,j) 成分の

[1]正則行列でなくても，一意性はなくなるが，同様の極分解がある．
[2] ${}^tuu=({}^tgg)^{-1/2}\,{}^tgg({}^tgg)^{-1/2}=I_n$.

み 1 で他は 0 である行列）に関する線型変換 $\rho(d)$ の表現行列は「対角行列」であって，どの d_i も $(n+1)$ 個現れる．ゆえに

$$\det\rho(d) = (d_1\cdots d_n)^{n+1} = (\det d)^{n+1}.$$

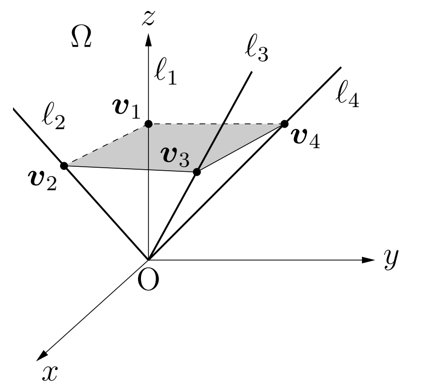
$g = u_1 d u_2$ であり，$g \mapsto \rho(g)$ が群準同型になっていることに注意すると

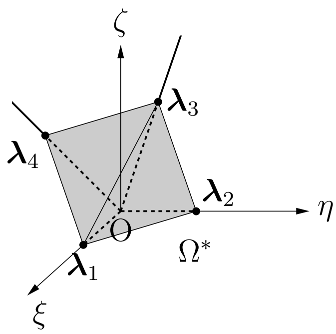
$$\begin{aligned}|\det\rho(g)| &= |\det\rho(u_1)\det\rho(d)\det\rho(u_2)| \\ &= |\det\rho(d)| = |\det d\,|^{n+1} = |\det g|^{n+1}. \qquad //\end{aligned}$$

例 6.6. H. Ishi, Proc. Japan Acad., 81 (2005), 44–46.
等質でない開凸錐として，次の 4 個のベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_4 := \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

で生成さされる角錐 $\Omega := \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\rangle_+$ と，その双対錐 Ω^* を考えた．





$\mathbb{R}^3$ の標準内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ に関する Ω の双対凸錐 Ω^* は，

$$\boldsymbol{\lambda}_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\lambda}_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\lambda}_3 := \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\lambda}_4 := \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

とおくとき，$\Omega^* = \langle \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3, \boldsymbol{\lambda}_4\rangle_+$ であった．

命題 6.7. (1) $\phi_\Omega(\boldsymbol{x}) = \dfrac{z}{xy(z-x)(z-y)} \quad \bigl(\boldsymbol{x} = {}^t(x,y,z)\bigr)$.

(2) $\phi_{\Omega^*}(\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{\xi+\eta+2\zeta}{\zeta(\xi+\zeta)(\eta+\zeta)(\xi+\eta+\zeta)} \quad \bigl(\boldsymbol{\xi} = {}^t(\xi,\eta,\zeta)\bigr)$.

証明. (1) $\Omega^* = \langle \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3\rangle_+ \cup \langle \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_3, \boldsymbol{\lambda}_4\rangle_+$（共通部分は Lebesgue 測度 0）に注意すると，$\phi_\Omega(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\int_{\langle \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3\rangle_+} e^{-\langle \boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\xi}\rangle}\,d\boldsymbol{\xi} + \int_{\langle \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_3, \boldsymbol{\lambda}_4\rangle_+} e^{-\langle \boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\xi}\rangle}\,d\boldsymbol{\xi}$ となる．

ここで，$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}_1 & \boldsymbol{\lambda}_2 & \boldsymbol{\lambda}_3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 1$ であるから，

$$\int_{\langle \boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\boldsymbol{\lambda}_3\rangle_+} e^{-\langle \boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\xi}\rangle}\,d\boldsymbol{\xi} = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\langle \boldsymbol{x}\,|\,t_1\boldsymbol{\lambda}_1+t_2\boldsymbol{\lambda}_2+t_3\boldsymbol{\lambda}_3\rangle}\,dt_1dt_2dt_3$$

$$= \prod_{j=1}^{3}\int_0^{+\infty} e^{-t\langle \boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\lambda}_j\rangle}\,dt = \frac{1}{\langle \boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\lambda}_1\rangle\langle \boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\lambda}_2\rangle\langle \boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\lambda}_3\rangle} = \frac{1}{xy(z-x)}.$$

同様に，$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}_1 & \boldsymbol{\lambda}_3 & \boldsymbol{\lambda}_4\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = 1$ より

$$\int_{\langle \boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_3,\boldsymbol{\lambda}_4\rangle_+} e^{-\langle \boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\xi}\rangle}\,d\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{\langle \boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\lambda}_1\rangle\langle \boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\lambda}_3\rangle\langle \boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\lambda}_4\rangle} = \frac{1}{x(z-x)(z-y)}.$$

ゆえに，$\phi_\Omega(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{xy(z-x)} + \dfrac{1}{x(z-x)(z-y)} = \dfrac{z}{xy(z-x)(z-y)}$.

(2) 同様にして

$$\begin{aligned}\phi_{\Omega^*}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\langle \boldsymbol{\xi}\,|\,\boldsymbol{v}_1\rangle\langle \boldsymbol{\xi}\,|\,\boldsymbol{v}_2\rangle\langle \boldsymbol{\xi}\,|\,\boldsymbol{v}_3\rangle} + \frac{1}{\langle \boldsymbol{\xi}\,|\,\boldsymbol{v}_1\rangle\langle \boldsymbol{\xi}\,|\,\boldsymbol{v}_3\rangle\langle \boldsymbol{\xi}\,|\,\boldsymbol{v}_4\rangle}\\ &= \frac{1}{\zeta(\xi+\zeta)(\xi+\eta+\zeta)} + \frac{1}{\zeta(\xi+\eta+\zeta)(\eta+\zeta)}\\ &= \frac{\xi+\eta+2\zeta}{\zeta(\xi+\zeta)(\eta+\zeta)(\xi+\eta+\zeta)}\end{aligned}$$

を得る． □

よって，$\log\phi(\boldsymbol{x}) = \log z - \log x - \log y - \log(z-x) - \log(z-y)$ ゆえ，

$$\boldsymbol{x}^* = -\nabla\log\phi(\boldsymbol{x}) = \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{z-x},\ \frac{1}{y} - \frac{1}{z-y},\ -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{z-y}\Big).$$

同様に，

$$\log\phi_{\Omega^*}(\boldsymbol{\xi}) = \log(\xi+\eta+2\zeta) - \log\zeta - \log(\xi+\zeta) - \log(\eta+\zeta) - \log(\xi+\eta+\zeta)$$

より，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}^* &= -\nabla\log\phi_{\Omega^*}(\boldsymbol{\xi})\\ &= \Big(-\frac{1}{\xi+\eta+2\zeta} + \frac{1}{\xi+\zeta} + \frac{1}{\xi+\eta+\zeta},\ -\frac{1}{\xi+\eta+2\zeta} + \frac{1}{\eta+\zeta} + \frac{1}{\xi+\eta+\zeta},\\ &\qquad -\frac{2}{\xi+\eta+2\zeta} + \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\xi+\zeta} + \frac{1}{\eta+\zeta} + \frac{1}{\xi+\eta+\zeta}\Big).\end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{x} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ のとき，$\boldsymbol{x}^* = (3, -3, 7)$ であり，$\boldsymbol{\xi} = (3, -3, 7)$ のとき，$\boldsymbol{\xi}^* = \left(\frac{6}{35}, \frac{9}{28}, \frac{69}{140}\right) \neq \boldsymbol{x}$．ゆえに $\boldsymbol{x}^{**} \neq \boldsymbol{x}$ である．

§7. 等質開凸錐とクラン

V：有限次元実ベクトル空間，内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を持つ．$\|x\| := \sqrt{\langle x\,|\,x\rangle}$.
Ω：V の正則開凸錐．Ω は等質であるとする．すなわち，$GL(\Omega) \curvearrowright \Omega$：推移的.

Vinberg (1963) により
$GL(\Omega)$ の同時三角化可能な部分群 H で，Ω に単純推移的に作用するものが存在する．**Borel** 部分群，岩澤部分群などという．$GL(\Omega)$ の連結な同時三角化可能な部分群の中で極大なもので，$GL(\Omega)$ の中で互いに共役である．
ここで，同時三角化可能であるとは，V にうまく基底をとると，H の元はすべて下三角行列（上三角でもよい）で表されることをいう．また単純推移的であるとは，推移的かつ固定部分群 $H_a = \{h \in H\ ;\ ha = a\}$ $(a \in \Omega)$ が trivial なこと．

注意 7.1. $b = h_0 a$ のとき，$h_0^{-1} H_b h_0 = H_a$ である．実際
$$h \in H_b \iff hb = b \iff hh_0 a = h_0 a \iff h_0^{-1} h h_0 a = a \iff h_0^{-1} h h_0 \in H_a.$$

• 線型 **Lie** 群：$GL(V)$ の閉部分群になっている群.
G：線型 Lie 群．G の **Lie** 代数とは，次の集合 $\mathfrak{g}$ のこと：$\mathcal{L}(V)$ は V 上の線型作用素全体がなすベクトル空間を表すとき,
$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathcal{L}(V)\ ;\ \exp tX \in G\ \ (\forall t \in \mathbb{R})\}.$$
この $\mathfrak{g}$ のことを $\mathrm{Lie}(G)$ とも書く.
• $\mathcal{L}(V)$ は $GL(V)$ の Lie 代数になっている.
$X, Y \in \mathcal{L}(V)$ に対して，$[X, Y] := XY - YX$ とおく．次の補題は容易に証明できる.

補題 7.2. (1) $[X, Y]$ は双線型写像（X に関しても Y に関しても線型）.
(2) $[Y, X] = -[X, Y]$.
(3) (**Jacobi** の恒等式）$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [Z, X], Y] = 0$.

あまり明らかでないが，次が成り立つ.

命題 7.3. $G \subset GL(V)$；線型 Lie 群，$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$.
(1) $\mathfrak{g}$ は $\mathcal{L}(V)$ の部分ベクトル空間である.
(2) $X, Y \in \mathfrak{g}$ ならば，$[X, Y] \in \mathfrak{g}$ である.

【解説】(1) は和について non-trivial．次の **Lie–Trotter** 積公式より従う.
$$\exp(X + Y) = \lim_{n\to\infty}\left(\exp\frac{1}{n}X \exp\frac{1}{n}Y\right)^n$$

(2) も non-trivial．次の式から従う．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\exp\frac{1}{n}X\right)\left(\exp\frac{1}{n}Y\right)\left(\exp-\frac{1}{n}X\right)\left(\exp-\frac{1}{n}Y\right)\right)^{n^2}=\exp\,[X,Y].$$

• $\mathfrak{g}$ を G の単位元 e における接空間とみることができる：
$T\in\mathfrak{g}$ のとき，e を通る G 内の曲線 $t\mapsto\exp tT=(\exp tT)e$ の $t=0$ における接ベクトルは $\left.\dfrac{d}{dt}\exp(tT)\right|_{t=0}=T$ である．

さて Ω に戻って，$GL(\Omega)$ の岩澤部分群を H とし，$\mathfrak{h}:=\mathrm{Lie}(H)\subset\mathcal{L}(V)$ とする．
$E\in\Omega$ を固定して，軌道写像 $H\ni h\mapsto hE\in\Omega$ を考えると，作用が単純推移的であるから，これは微分同相．そうすると，この軌道写像の H の単位元における微分

$$\mathfrak{h}\ni T\mapsto TE=\left.\frac{d}{dt}(\exp tT)E\right|_{t=0}\in V$$

は線型同型写像である．その逆写像（もちろん線型写像）を

$$L:V\ni x\mapsto L_x\in\mathfrak{h}$$

とする．つまり，各 $x\in V$ に対して，L_x は $L_xE=x$ をみたす一意的な $\mathfrak{h}$ の元で，それは V 上の線型作用素である．

定義 7.4. $x\triangle y:=L_xy\ (x,y\in V)$.
明らかに，$x\triangle y$ 双線型写像である．これにより，V に algebra（線型空間 + 環）の構造が定義された．ただし結合法則は要求していない．

補題 7.5. $[L_x,L_y]=L_{x\triangle y-y\triangle x}\ (x,y\in V)$.

証明. $[L_x,L_y]\in\mathfrak{h}$ であって，$[L_x,L_y]E=L_xy-L_yx=x\triangle y-y\triangle x$. □

一般にベクトル空間 V に双線型な積 $\triangle$ が定義されていて，その積による左かけ算作用素 L_x が補題 7.5 の性質をみたすとき，$(V,\triangle)$ のことを左対称代数と呼ぶ．この用語の妥当性を見るために，結合子 $[\cdot,\cdot,\cdot]$ を導入しよう：

$$[a,b,c]:=a\triangle(b\triangle c)-(a\triangle b)\triangle c.$$

補題 7.6. $[L_x,L_y]=L_{x\triangle y-y\triangle x}\,(\forall x,y\in V)\iff[x,y,z]=[y,x,z]\,(\forall x,y,z\in V)$.
すなわち，3 重線型写像である結合子は，左側の 2 変数について対称である．

証明. 定義によって

$$[x,y,z]=x\triangle(y\triangle z)-(x\triangle y)\triangle z,\qquad [y,x,z]=y\triangle(x\triangle z)-(y\triangle x)\triangle z.$$

したがって

$$\begin{aligned}[x,y,z]=[y,x,z]&\iff x\triangle(y\triangle z)-y\triangle(x\triangle z)=(x\triangle y)\triangle z-(y\triangle x)\triangle z\\&\iff [L_x,L_y]z=L_{x\triangle y-y\triangle x}z.\ //\end{aligned}$$

補題 7.7. $\mathrm{tr}\,L_{x\triangle y}$ は V に内積を定める：$\begin{cases}\mathrm{tr}\,L_{x\triangle y}=\mathrm{tr}\,L_{y\triangle x}\\ \mathrm{tr}\,L_{x\triangle x}>0 & (\text{if } x\neq 0)\end{cases}$

証明. 補題7.5で両辺の trace をとることで，$\mathrm{tr}\,L_{x\,\triangle\,y}=\mathrm{tr}\,L_{y\,\triangle\,x}$ を得る．正定値性を示すために，Ω の特性函数を ϕ とする：Ω^* は Ω の双対凸錐とするとき，

$$\phi(u):=\int_{\Omega^*}e^{-\langle\, u\,|\,y\,\rangle}\,dy\qquad(u\in\Omega).$$

特性函数 ϕ は $\phi(gu)=|\det g|^{-1}\phi(u)$ $(g\in GL(\Omega),\,x\in\Omega)$ をみたす．したがって，$x\in V,\,t\in\mathbb{R}$ のとき

$$\phi((\exp tL_x)E)=(\det\exp tL_x)^{-1}\phi(E)=e^{-t\,(\mathrm{tr}\,L_x)}\phi(E).$$

簡単のため $\Phi(u)=\log\phi(u)$ とおくと

$$\Phi((\exp tL_x)E)=-t\,(\mathrm{tr}\,L_x)+\Phi(E). \tag{7.1}$$

ここで函数 $\Phi(u)$ の $u=E$ における Taylor 展開を考える：

$$\begin{aligned}\Phi(E+h)&=\Phi(E)+D_h\Phi(E)+D_h^2\Phi(E)+o(\|\,h\,\|^2)\\ &=\Phi(E)+\langle\, h\,|\,\nabla\,\rangle\Phi(E)+\frac{1}{2}\langle\, h\,|\,\nabla\,\rangle^2\,\Phi(E)+o(\|\,h\,\|^2)\quad(h\to 0).\end{aligned}$$

2行目は $D_h=\sum h_j\dfrac{\partial}{\partial x_j}=:\langle\, h\,|\,\nabla\,\rangle$ であることに注意すればよい．さて，

$$(\exp tL_x)E=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}(L_x)^jE=E+tx+\frac{1}{2}t^2\,(x\triangle x)+o(t^2)\qquad(t\to 0)$$

であるから，Taylor 展開で $h=(\exp tL_x)E-E$ とおくと

$$\begin{aligned}\Phi((\exp tL_x)E)&=\Phi(E)+t\,\langle\, x+\tfrac{1}{2}t(x\triangle x)+o(t)\,|\,\nabla\,\rangle\Phi(E)\\ &\qquad+\frac{1}{2}t^2\,\langle\, x+\tfrac{1}{2}t(x\triangle x)+o(t)\,|\,\nabla\,\rangle^2\Phi(E)+o(t^2)\\ &=\Phi(E)+t\,\langle\, x\,|\,\nabla\,\rangle\Phi(E)\\ &\qquad+\frac{1}{2}t^2\big\{\langle\, x\triangle x\,|\,\nabla\,\rangle+\langle\, x\,|\,\nabla\,\rangle^2\big\}\Phi(E)+o(t^2)\qquad(t\to 0).\end{aligned}$$

これより，(7.1)において，t，t^2 の係数を比べることにより

$$-\mathrm{tr}\,L_x=\langle\, x\,|\,\nabla\,\rangle\Phi(E)=D_x\log\phi(E),\qquad(D_{x\triangle x}+D_x^2)\log\phi(E)=0.$$

ゆえに最初の式で，x のところを $x\triangle x$ とおいて，2番目の式を用いると

$$\mathrm{tr}\,L_{x\,\triangle\,x}=-D_{x\,\triangle\,x}\log\phi(E)=D_x^2\log\phi(E)=\sigma_E(x,x)>0\qquad(\text{if } x\neq 0).$$

以上で証明終わり． □

定義 7.8. 一般に $(V,\triangle)$ を algebra とする（結合法則は仮定しない）.
(V,Δ) が **clan** であるとは，左乗法作用素 $L_x y := x\triangle y$ に対して，次の (1)〜(3) がみたされるときをいう.

(1) $(V,\triangle)$ は左対称代数である：$[L_x, L_y] = L_{x\triangle y - y\triangle x}$.

(2) $s\in V^*$（V の双対空間：V 上の線型形式全体がなすベクトル空間）が存在して，$s(x\triangle y)$ は V に内積を定める．このような $s\in V^*$ は認容線型形式と呼ばれる.

(3) 各 $x\in V$ に対して，L_x の固有値は実数のみである.

命題 7.9. Ω：V の等質な正則開凸錐 $\Longrightarrow$ V に clan の構造が入る.

証明. (1) と (2) は OK： $s(x) := \operatorname{tr} L_x$.
(3) については，$\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$ が同時三角化可能であることより. □

命題 7.10. 命題 7.9 の V の clan 構造において，E は単位元である.

証明. $x\in V$ のとき，定義より $x\triangle E = L_x E = x$.

一方で，$E\triangle x = x$ の方は，highly non-trivial である．まず H は，$x\mapsto e^{\lambda}x$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ という 1 径数の変換を含んでいることに注意．これは $GL(\Omega)$ の極大分裂可解群として H を選んでいることから来る．実際，$GL(\Omega)$ の単位元の連結成分 $GL(\Omega)^{\circ}$ は，ある代数群の単位元の連結成分に一致し，その代数群の極大三角群 (Borel subgroup) として H をとっているのである．極大性から，$GL(\Omega)^{\circ}$ の 1 径数部分群を含まねばならない．したがって，H の Lie 代数 $\mathfrak{h}$ は，1 径数部分群 $\{e^{\lambda}I\}$ の生成元である恒等写像 I を含んでいる．明らかに $IE = E$ であるから，一意性より $L_E = I$ である．ゆえに $E\triangle x = L_E x = Ix = x$ となって，E が単位元であることが示された. □

§8. クラン構造の例

例 8.1.　$V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$，$\Omega := \Omega_n = \{x \in V \;;\; x \gg 0\}$，$E = I_n \in \Omega$：単位行列．以下 V に入る clan 構造（単位元は E）を見てみよう．

$$H_n := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_n \end{pmatrix} \;;\; a_i > 0 \;\; (\forall i) \right\} \subset GL(n, \mathbb{R}).$$

H_n は $GL(n, \mathbb{R})$ の部分群である．以下 $h \in H_n$ に対して，$\rho(h)x = hx\,{}^t\!h$ $(x \in V)$ で，$\rho(h) \in GL(V)$ を定義すると，$\rho(h) \in GL(\Omega)$ である．

命題 8.2.　ρ により，H_n は Ω に単純推移的に働く．すなわち，任意の $x \in \Omega$ に対して，$h\,{}^t\!h = x$ となる $h \in H_n$ が一意的に存在する．

以前に，$x = \begin{pmatrix} x_{11} & {}^t\xi \\ \xi & x' \end{pmatrix}$ $(x_{11} > 0,\ \xi \in \mathbb{R}^{n-1},\ x' \in \Omega_{n-1})$ と書くとき，平方完成により，

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & {}^t\beta \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \left(\alpha = \sqrt{x_{11}},\ \beta = \frac{\xi}{\sqrt{x_{11}}},\ y \in \Omega_{n-1} \right)$$

と表されることを示したが，これと帰納法を使えば命題がわかる．

あるいは次のように純粋に行列の計算により，$x \in \Omega$ が与えられたとき，$h\,{}^t\!h = x$ となる $h \in H$ が一意的に定まることを示すこともできる．

$n = 1$ のときは明らかゆえ，$n > 1$ とし，$n - 1$ のときの成立を仮定する．

$$x = \left(\begin{array}{c|c} x' & \xi \\ \hline {}^t\xi & x_{nn} \end{array} \right) \qquad (x' \in \Omega_{n-1},\ \xi \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_{nn} > 0) \tag{8.1}$$

のように行列 x を区分けする．H_n の元も同様に

$$h = \left(\begin{array}{c|c} h' & 0 \\ \hline {}^t\eta & a_n \end{array} \right) \qquad (h' \in H_{n-1},\ \eta \in \mathbb{R}^{n-1},\ a_n > 0)$$

と区分けする．そうすると

$$h\,{}^t\!h = \left(\begin{array}{c|c} h' & 0 \\ \hline {}^t\eta & a_n \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} {}^t\!h' & \eta \\ \hline 0 & a_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} h'\,{}^t\!h' & h'\eta \\ \hline {}^t\eta\,{}^t\!h' & {}^t\eta\eta + a_n^2 \end{array} \right).$$

これが (8.1)の x に等しいということから

$$h'\,{}^t\!h' = x', \qquad h'\eta = \xi, \qquad {}^t\eta\eta + a_n^2 = x_{nn}. \tag{8.2}$$

帰納法の仮定より $h' \in H_{n-1}$ が一意に定まり，その h' を使って $\eta = h'^{-1}\xi$ が一意に定まる．そして，$h\,{}^t\!h = x$ において行列式をとれば，$(\det h)^2 = \det x$，すなわち，

$(a_1a_2\cdots a_n)^2 = \det x$ を得るので，$a_n = \dfrac{\sqrt{\det x}}{a_1\cdots a_{n-1}} = \dfrac{\sqrt{\det x}}{\sqrt{\det x'},}$．あるいはもっと直接的に (8.2)より a_n を求めてみよう．まず $x_{nn} - {}^t\eta\eta > 0$ を示すために（それがわかれば，$a_n = \sqrt{x_{nn} - {}^t\eta\eta}$ と解ける）

$$x_{nn} - {}^t\eta\eta = x_{nn} - {}^t\xi\,{}^th'^{-1}\,h'^{-1}\xi = x_{nn} - {}^t\xi x'^{-1}\xi$$

に注意する．この右辺が $\dfrac{\det x}{\det x'} > 0$ に等しいことは次の等式よりわかる（ただし，E' は $n-1$ 次単位行列）：

$$\left(\begin{array}{c|c} x' & \xi \\ \hline {}^t\xi & x_{nn}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E' & -x'^{-1}\xi \\ \hline 0 & 1\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} x' & 0 \\ \hline {}^t\xi & x_{nn} - {}^t\xi x'^{-1}\xi\end{array}\right).$$

一般に，x の左上からの首座小行列式を $\Delta_1(x),\ldots,\Delta_n(x) = \det x$ とすると，

$$a_j = \sqrt{\frac{\Delta_j(x)}{\Delta_{j-1}(x)}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

である．ただし，$\Delta_0(x) \equiv 1$ とする．□

以下，$H := \rho(H_n)$ とおく．$\mathfrak{h}_n := \mathrm{Lie}(H_n)$ は下三角行列の全体になる：

$$\mathfrak{h}_n = \begin{pmatrix} * & & \text{\Large 0} & \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large $*$} & & & * \end{pmatrix}$$

写像 $\rho : h \mapsto \rho(h)$ の $E \in H$ における微分も（面倒なので）同じ記号 ρ で表すことにする．すなわち，$\rho(\exp tX)y = (\exp tX)y\,{}^t(\exp tX)$ を $t = 0$ で微分して，

$$\rho(X)y = Xy + y\,{}^tX \qquad (y \in V).$$

$\mathfrak{h} := \rho(\mathfrak{h}_n)$ は H の Lie 代数である．各 $x \in V$ に対して，$\underline{x} \in \mathfrak{h}_n$ を次で定義する：

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & & \text{\Large 0} & \\ x_{21} & \frac{1}{2}x_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_{n1} & \ldots & x_{n,n-1} & \frac{1}{2}x_{nn} \end{pmatrix}.$$

明らかに $x = \underline{x} + {}^t(\underline{x})$．言い換えれば $\rho(\underline{x})E = x$ であるから，定義と一意性から $L_x = \rho(\underline{x})$．ゆえに

$$x \mathbin{\triangle} y = \underline{x}\,y + y\,{}^t(\underline{x}) \qquad (x, y \in V).$$

これが V のクラン構造の積であり，$E \mathbin{\triangle} x = x \mathbin{\triangle} E = x$ が直ちにわかるから，E は単位元である．

以下，$(V, \triangle)$ が実際に clan であることを直接に見てみよう．(i,j) 成分のみ 1 で，

他の成分はすべて 0 という行列を E_{ij} とする（行列単位）．$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ であることは容易に確かめることができる．そして

$$f_{ii} := E_{ii} \ \ (i = 1, \dots, n), \qquad f_{ij} := E_{ij} + E_{ji} \ \ (1 \leqq i < j \leqq n)$$

とおくと，$\{f_{ij}\ ;\ 1 \leqq i \leqq j \leqq n)\}$ は V の基底をなしている．この基底に辞書式順序を入れる．次の補題は直接の計算で示される．

補題 8.3. (1) $i = j$ のとき，$L_{f_{ii}}x = \frac{1}{2}(E_{ii}x + xE_{ii})$ であって，

(i) $L_{f_{ii}}f_{ii} = f_{ii}$，

(ii) $L_{f_{ii}}f_{ai} = \frac{1}{2}f_{ai} \quad (a < i), \qquad L_{f_{ii}}f_{ij} = \frac{1}{2}f_{ij} \quad (i < j)$，

(iii) $L_{f_{ii}}f_{kl} = 0 \quad (k < l,\ k \neq i,\ l \neq i)$.

すなわち，基底 $\{f_{kl}\}$ に関する $L_{f_{ii}}$ の表示行列は対角行列である．

(2) $i < j$ のとき，$L_{f_{ij}}x = E_{ji}x + xE_{ij}$ であって，

(i) $L_{f_{ij}}f_{ii} = f_{ij}$.

(ii) $i < k$ のとき，$L_{f_{ij}}f_{ik} = \begin{cases} f_{jk} & (\text{if } j < k), \\ 2f_{jj} & (\text{if } j = k), \\ f_{kj} & (\text{if } j > k). \end{cases}$

(iii) $a < i$ のとき，$L_{f_{ij}}f_{ai} = f_{aj}$.

(iv) $k \leqq l$ で，$k \neq i$ かつ $l \neq i$ のとき，$L_{f_{ij}}f_{kl} = 0$.

すなわち，基底 $\{f_{kl}\}$ に関する $L_{f_{ij}}$ の表示行列は真に下三角行列になっている．

さて各 $x \in V$ を $x = \sum_i x_{ii}f_{ii} + \sum_{i<j} x_{ij}f_{ij}$ と表すと，$L_x = \sum_i x_{ii}L_{f_{ii}} + \sum_{i<j} x_{ij}L_{f_{ij}}$ となるので，各作用素 L_x は下三角行列で表される．ゆえに L_x の固有値は実数のみである．さらに補題 8.3 (2) より，$\operatorname{tr} L_x = \sum_{i=1}^{n} x_{ii} \operatorname{tr} L_{f_{ii}}$．補題 8.3 (1) より，作用素 $L_{f_{ii}}$ の固有値 1 の重複度は 1，$\frac{1}{2}$ の重複度は $n-1$ ゆえ，$\operatorname{tr} L_{f_{ii}} = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}(n+1)$ であるから

$$\operatorname{tr} L_x = \frac{1}{2}(n+1)\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = \frac{1}{2}(n+1)\operatorname{tr} x.$$

したがってまた

$$\operatorname{tr} L_{x \triangle y} = \frac{1}{2}(n+1)\operatorname{tr}(x \triangle y) = \frac{1}{2}(n+1)\big(\operatorname{tr}(\underline{x}\, y) + \operatorname{tr}({}^t(\underline{x})y)\big) = \frac{1}{2}(n+1)\operatorname{tr}(xy).$$

よって，確かに $\operatorname{tr} L_{x\triangle y}$ は V に内積を定義している．

$V = \sum_{i<j} V_{ji}$，$V_{ji} = \mathbb{R}f_{ji}$ を clan $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ の正規分解という．

注意 8.4.　$\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ のときは，クラン積よりも，$x\circ y := \frac{1}{2}(xy+yx)$ で定義する Jordan 積を考えるのが普通である．

定義 8.5.　V：実ベクトル空間，V に双線型な積 $x\circ y$ が定義されているとする（結合法則は仮定しない）．$(V,\circ)$ が **Jordan** 代数であるとは，$\forall x,y\in V$ に対して，
(1) 積は可換：　$x\circ y = y\circ x\ (\forall x,y\in V)$.
(2) $x^2\circ(x\circ y) = x\circ(x^2\circ y) \qquad (x^2 := x\circ x)$.

定義 8.6.　単位元を持つ Jordan 代数 V が **Euclid** 型 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ V は結合的な内積を持つ：

$$\exists\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle \ \text{s.t.}\ \langle\, x\circ y\,|\,z\,\rangle = \langle\, x\,|\,y\circ z\,\rangle \qquad (\forall x,y,z\in V).$$

注意 8.7.　積が可換であることに注意すると，V が Euclid 型 $\iff$ かけ算作用素 $M(y)$ $(M(y)x := y\circ x)$ が $\forall y\in V$ に対して自己共役となる内積が存在する．

命題 8.8.　$\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ で，$\langle\, x\,|\,y\,\rangle := \mathrm{tr}\,(xy)$ は結合的内積である．

証明.　定義から，

$$\begin{aligned}\langle\, M(y)x\,|\,z\,\rangle &= \tfrac{1}{2}\langle\, yx+xy\,|\,z\,\rangle = \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,(yxz+xyz)\\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,(x(zy+yz)) = \langle\, x\,|\,M(y)z\,\rangle.\ \ //\end{aligned}$$

したがって，$(V,\circ)$ は Euclid 型 Jordan 代数である．そして $E=I_n$ は Jordan 代数での単位元にもなっている．$V(M(f_{ii}),1)$ を作用素 $M(f_{ii})$ の 1–固有空間とすると，

$$f_{ii}f_{jj} = \delta_{ij}f_{ii},\quad f_{11}+f_{22}+\cdots+f_{nn}=E,\quad \dim V(M(f_{ii}),1)=1$$

より，$f_{11},\ldots,f_{nn}$ は V の **Jordan** 枠（原始ベキ等元の完全直交系のこと）になっているという．一般に Jordan 枠があると，その Joedan 代数は Peirce 分解（$M(f_{ii})$ 達による同時固有空間分解）される．先の証明から，$L_{f_{ii}} = M(f_{ii})$ であり，正規分解が $L_{f_{ii}}\ (i=1,2,\ldots,n)$ の同時固有空間分解であることから，

$$V\text{ の正規分解} = V\text{ の Peirce 分解}.$$

定義 8.9.　等質開凸錐で（ある内積で）自己双対になっているものを対称錐と呼ぶ．

$\Omega\subset V$ が対称錐 $\iff$ $GL(\Omega)$ は reductive $(GL(\Omega) = {}^tGL(\Omega))$.
V には Euclid 型の Jordan 代数構造が入って，$\Omega = \mathrm{Int}\{x^2\,;\,x\in V\}$ となる．
$G = GL(\Omega)^\circ$：単位元の連結性分，$G=KAN$：岩澤分解.
ただし，K は G の極大コンパクト部分群，$H = AN = A\ltimes N$：岩澤部分群.
H は Ω に単純推移的に働くので，V には clan 構造も入る．

命題 8.10.　V： Euclid 型 Jordan 代数で単純 $\Longrightarrow$ $M(x) = \frac{1}{2}(L_x + {}^tL_x)\ (\forall x\in V)$.

§9. クランの主分解

以下 $(V, \triangle)$ をクランとする．すなわち，$L_x y := x \triangle y$ を左かけ算作用素とするとき，
(1) $[L_x, L_y] = L_{x \triangle y - y \triangle x}$，
(2) $\exists s \in V^*$ s.t. $\langle\, x \,|\, y \,\rangle := s(x \triangle y)$ は V の内積.
(3) $\forall x \in V$ に対して，L_x は実固有値のみ.

以下，クラン $(V, \triangle)$ を考え，単位元の存在は仮定しない.
右かけ算作用素を R_x とする： $R_x y := y \triangle x$ $(\forall y \in V)$.

補題 9.1. $[L_x, R_y] = R_{x \triangle y} - R_y R_x$.

証明. $\forall z \in V$ に対して

$$\begin{aligned}&[L_x, R_y]z - R_{x \triangle y} z + R_y R_x z \\ &\quad = x \triangle (z \triangle y) - (x \triangle z) \triangle y - z \triangle (x \triangle y) + (z \triangle x) \triangle y \\ &\quad = [L_x, L_z]y - L_{x \triangle z - z \triangle x} y = 0. \ //\end{aligned}$$

さて，$e_0 \in V$ を，$s(x) = \langle\, x \,|\, e_0 \,\rangle$ $(\forall x \in V)$ をみたす元とする．また，結合子 $[x, y, z] := x \triangle (y \triangle z) - (x \triangle y) \triangle z$ を導入すると，クランの定義 (1) と，$[x, y, z] = [y, x, z]$（結合子の左対称性）が同値であったことを思い出そう.

命題 9.2. (1) ${}^t R_{e_0} = R_{e_0}$. (2) $e_0 \triangle e_0 = e_0$. (3) $R_{e_0}^2 = R_{e_0}$，$[L_{e_0}, R_{e_0}] = 0$.

証明. (1) $x, y \in V$ とする.

$$\begin{aligned}\langle\, R_{e_0} x \,|\, y \,\rangle - \langle\, x \,|\, R_{e_0} y \,\rangle &= \langle\, x \triangle e_0 \,|\, y \,\rangle - \langle\, x \,|\, y \triangle e_0 \,\rangle = \langle\, y \,|\, x \triangle e_0 \,\rangle - \langle\, x \,|\, y \triangle e_0 \,\rangle \\ &= s\big(y \triangle (x \triangle e_0)\big) - s\big(x \triangle (y \triangle e_0)\big) = s\big((y \triangle x) \triangle e_0\big) - s\big((x \triangle y) \triangle e_0\big) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\text{（結合子の左対称性を使った）} \\ &= \langle\, y \triangle x \,|\, e_0 \,\rangle - \langle\, x \triangle y \,|\, e_0 \,\rangle = s(y \triangle x) - s(x \triangle y) = \langle\, x \,|\, y \,\rangle - \langle\, y \,|\, x \,\rangle = 0.\end{aligned}$$

(2) (1) より，$\forall x \in V$ に対して

$$\langle\, e_0 \triangle e_0 \,|\, x \,\rangle = \langle\, e_0 \,|\, x \triangle e_0 \,\rangle = s(x \triangle e_0) = \langle\, x \,|\, e_0 \,\rangle = \langle\, e_0 \,|\, x \,\rangle.$$

(3) $P := R_{e_0}^2 - R_{e_0}$ とおくと，${}^t P = P$ であり，R_{e_0} と可換である．そして補題 9.1 と (2) より，$[L_{e_0}, R_{e_0}] = R_{e_0 \triangle e_0} - R_{e_0}^2 = -P$．ゆえに

$$\operatorname{tr} P^2 = -\operatorname{tr}\big([L_{e_0}, R_{e_0}]P\big) = -\operatorname{tr}(L_{e_0} R_{e_0} P - R_{e_0} L_{e_0} P) = \operatorname{tr}(L_{e_0}[P, R_{e_0}]) = 0.$$

$\operatorname{tr}(XY)$ が $\mathrm{Sym}(V)$ に内積を定めていることから $P = 0$ が出る. □

定義 9.3. e_0 をクラン $(V, \triangle)$ の主ベキ等元と呼ぶ.

注意 9.4. V が単位元 e を持てば，$e_0 = e$ である．実際 $\forall x \in V$ に対して

$$\langle e \,|\, x \rangle = s(e \triangle x) = s(x) = \langle x \,|\, e_0 \rangle.$$

さて命題 9.2 より，R_{e_0} は直交射影作用素である．ゆえに

$$V = \operatorname{Ker}(R_{e_0} - I) \oplus \operatorname{Ker} R_{e_0} \qquad \text{（直交直和）}. \tag{9.1}$$

e_0 が単位元であれば，もちろん何もしていない．

補題 9.5. $L_{e_0} = \frac{1}{2}(R_{e_0} + I)$.

証明. まず，$L_{e_0} + {}^tL_{e_0} = R_{e_0} + I \ \cdots$ ① であることを示そう．$\forall x, y \in V$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle L_{e_0}x \,|\, y \rangle + \langle x \,|\, L_{e_0}y \rangle &= s\big((e_0 \triangle x) \triangle y\big) + s\big(x \triangle (e_0 \triangle y)\big) \\
&= s\big(e_0 \triangle (x \triangle y)\big) + s\big((x \triangle e_0) \triangle y\big) \quad \text{（左対称性より）} \\
&= \langle e_0 \,|\, x \triangle y \rangle + \langle R_{e_0}x \,|\, y \rangle \\
&= \langle x \,|\, y \rangle + \langle R_{e_0}x \,|\, y \rangle.
\end{aligned}$$

ここで，$K := \frac{1}{2}(R_{e_0} + I) - L_{e_0}$ を考える．命題 9.2 (3) より L_{e_0} と R_{e_0} は可換であるから，L_{e_0} は直和分解??を保ち，それぞれで L_{e_0} は実の固有値を持つ．ゆえに，K は実固有値のみを持つことがわかる．一方で①より $K = \frac{1}{2}({}^tL_{e_0} - L_{e_0})$ となるから，K は歪対称である．これより K の固有値は 0 か純虚数でないといけない．先の議論とあわせると K の固有値は 0 のみが可能である．歪対称作用素の固有値が 0 のみになるので，作用素自身が 0 である． □

したがって，各部分空間上での L_{e_0}, R_{e_0} は次の通り：

	$\operatorname{Ker}(R_{e_0} - I)$	$\operatorname{Ker} R_{e_0}$
L_{e_0}	I	$\frac{1}{2}I$
R_{e_0}	I	O

以下，$V_{(1)} := \operatorname{Ker}(L_{e_0} - I)$，$V_{(1/2)} = \operatorname{Ker}(L_{e_0} - \frac{1}{2}I)$ とおいて，得られる直交直和分解 $V = V_{(1)} \oplus V_{(1/2)}$ をクラン V の主分解と呼ぶ．

命題 9.6. $a \triangle b$ の乗積表は次のようになる：

	$b \in V_{(1)}$	$b \in V_{(1/2)}$
$a \in V_{(1)}$	$V_{(1)}$	$V_{(1/2)}$
$a \in V_{(1/2)}$	0	$V_{(1)}$

特に $V_{(1)}$ は部分代数で，e_0 は $V_{(1)}$ の単位元である．

証明. $L_{e_0}a = \lambda_a a$，$L_{e_0}b = \lambda_b b$ として，$L_{e_0}(a \triangle b)$ を計算しよう．

$$\begin{aligned}
L_{e_0}(a \triangle b) &= e_0 \triangle (a \triangle b) = (e_0 \triangle a) \triangle b + [e_0, a, b] \\
&= \lambda_a a \triangle b + [a, e_0, b] = \lambda_a a \triangle b + a \triangle (e_0 \triangle b) - (a \triangle e_0) \triangle b.
\end{aligned}$$

補題 9.5 より $R_{e_0}a = (2\lambda_a - 1)a$ であるから，$L_{e_0}(a \triangle b) = (-\lambda_a + \lambda_b + 1)(a \triangle b)$. □

命題 9.7. (1) $x, y \in V_{(1/2)} \implies x \triangle y = y \triangle x$.
(2) $a \in V_{(1)}$，$b \in V_{(1/2)} \implies [L_a, L_x] = L_{a \triangle x}$.
(3) $a \in V_{(1)}$，$x, y \in V_{(1/2)} \implies L_a(x \triangle y) = (L_a x) \triangle y + x \triangle (L_a y)$.

証明. (1) $R_{e_0}(x \triangle y - y \triangle x) = L_{x \triangle y - y \triangle x} e_0 = [L_x, L_y] e_0 = L_x R_{e_0} y - L_y R_{e_0} x = 0$. ゆえに $x \triangle y - y \triangle x \in V_{(1/2)}$．一方で命題 9.6 より $x \triangle y - y \triangle x \in V_{(1)}$．よって $x \triangle y - y \triangle x = 0$ である．
(2) $x \triangle a = 0$ より．
(3) $L_a(x \triangle y) - x \triangle (L_a y) = [L_a, L_x] y \overset{(2)}{=} L_{a \triangle x} y (L_a x) \triangle y$. □

以下，次のような $\mathcal{L}(V)$ の部分空間を考える：

$$\mathfrak{h} := \{L_a \,;\, a \in V_{(1)}\}, \qquad \mathfrak{n} := \{L_x \,;\, x \in V_{(1/2)}\}.$$

補題 9.8. (1) $\mathfrak{h}$ も $\mathfrak{n}$ も Lie 代数 $\mathfrak{gl}(V) = \mathcal{L}(V)$ の部分代数で，$[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \{0\}$ である．
(2) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{n}$ を正規化する：$[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$.
(3) $h = \exp L_a$ $(a \in V_{(1)})$ とおくと，$h(x \triangle y) = (hx) \triangle (hy)$.

証明. (1) $a, a' \in V_{(1)}$ のとき，$[L_a, L_{a'}] = L_{a \triangle a' - a' \triangle a} \in \mathfrak{h}$.
そして $x, y \in V_{(1/2)}$ のとき，$[L_x, L_y] = L_{x \triangle y - y \triangle x} = 0$（命題 9.7 (1) による）．
(2) $a \in V_{(1)}$ かつ $x \in V_{(1/2)}$ のとき，$[L_a, L_x] = L_{a \triangle x} \in \mathfrak{n}$.
(3) $f(t) = \big((\exp tL_a)x\big) \triangle \big((\exp tL_a)y\big)$ $(t \in \mathbb{R})$ とおくと，命題 9.7 (3) より

$$f'(t) = \big(L_a(\exp tL_a)x\big) \triangle (\exp tL_a)y + (\exp tL_a)x \triangle \big(L_a(\exp tL_a)y\big) = L_a(f(t)).$$

そして $f(0) = x \triangle y$．一方，$g(t) := (\exp tL_a)(x \triangle y)$ も $g'(t) = L_a(g(t))$ をみたし，$g(0) = x \triangle y$ である．微分方程式の解の一意性より，$f(t) = g(t)$ $(\forall t \in \mathbb{R})$．とくに $f(1) = g(1)$ である． □

例 9.9. $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ に次で積 $\triangle$ を入れる：

$$(\boldsymbol{x} + a) \triangle (\boldsymbol{y} + b) := \tfrac{1}{2} a \boldsymbol{y} + (ab + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) \qquad (a, b \in \mathbb{R},\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n).$$

ただし，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積である．このとき，この積 $\triangle$ が実際にクランを定義していることを見よう．

$$L_{\boldsymbol{x}+a} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}aI & \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{x} \cdot (\cdot) & a \end{array}\right)$$

であるから，$L_{\boldsymbol{x}+a}$ は下三角な作用素である．そして

$$\left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}aI & \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{x} \cdot (\cdot) & a \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}bI & \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{y} \cdot (\cdot) & b \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{4}abI & \mathbf{0} \\ \hline \frac{b}{2}\boldsymbol{x} \cdot (\cdot) + a\boldsymbol{y} \cdot (\cdot) & ab \end{array}\right)$$

より，$[L_{\boldsymbol{x}+a},\, L_{\boldsymbol{y}+b}] = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{0} \\ \hline \frac{a}{2}\boldsymbol{y}\cdot(\,\cdot\,) - \frac{b}{2}\boldsymbol{x}\cdot(\,\cdot\,) & O \end{array}\right)$.
一方，$(\boldsymbol{x}+a)\,\triangle\,(\boldsymbol{y}+b) - (\boldsymbol{y}+b)\,\triangle\,(\boldsymbol{x}+a) = \frac{1}{2}(a\boldsymbol{y} - b\boldsymbol{x}) + 0$ となるから

$$L_{(\boldsymbol{x}+a)\,\triangle\,(\boldsymbol{y}+b)-(\boldsymbol{y}+b)\,\triangle\,(\boldsymbol{x}+a)} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{0} \\ \hline \frac{1}{2}(a\boldsymbol{y} - b\boldsymbol{x})\cdot(\,\cdot\,) & O \end{array}\right) = [L_{\boldsymbol{x}+a}, L_{\boldsymbol{y}+b}].$$

したがって $\triangle$ は左対称代数を定義している．さらに

$$s(\boldsymbol{x}+a) := a \qquad (a \in \mathbb{R},\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

で線型形式 s を定義すると，

$$s\big((\boldsymbol{x}+a)\,\triangle\,(\boldsymbol{y}+b)\big) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + ab$$

となって，$s\big((\boldsymbol{x}+a)\,\triangle\,(\boldsymbol{y}+b)\big)$ は確かに $\mathbb{R}^{n+1}$ に内積を定義している．実際それは $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準内積である．

したがってまた，$e_0 = \mathbf{0}+1$ であり，$L_{e_0} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}I & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}\cdot(\,\cdot\,) & 1 \end{array}\right)$ より，クラン $V = \mathbb{R}^{n+1}$ の主分解は，$V_{(1)} = \mathbb{R}$，$V_{(1/2)} = \mathbb{R}^n$ で与えられることもわかる．単位元をもたないこのクランは，凸領域

$$D := \{\boldsymbol{x}+a\,;\; a > \|\,\boldsymbol{x}\,\|^2\}$$

に対応している．実際，この D は等質である．各 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} n_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}+a) &:= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + (a + 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \|\,\boldsymbol{y}\,\|^2), \\ h_t(\boldsymbol{x}+a) &:= e^{t/2}\boldsymbol{x} + e^t a \end{aligned}$$

により，アファイン変換 $n_{\boldsymbol{y}}, h_t$ を定義すると，

$$N := \{n_{\boldsymbol{y}}\,;\; \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\}, \qquad H := \{h_t\,;\; t \in \mathbb{R}\}$$

はそれぞれ可換群をなし，H は N を正規化する $(h_t n_{\boldsymbol{y}} h_t^{-1} = n_{h_t\boldsymbol{y}})$ から半直積 $T := N \rtimes H$ が構成できる．そして，$\boldsymbol{x}+a \in D$ のとき，$t := \log(a - \|\,\boldsymbol{x}\,\|^2)$，$\boldsymbol{y} := \boldsymbol{x}$ とおくと

$$n_{\boldsymbol{y}}h_t(\mathbf{0}+1) = n_{\boldsymbol{y}}(\mathbf{0}+e^t) = \boldsymbol{y} + (e^t + \|\,\boldsymbol{y}\,\|^2) = \boldsymbol{x}+a$$

となるから，等質である（実際は単純推移的）．

§10. クランの正規分解

以下 $V=(V,\triangle)$：単位元 E を持つクラン．クランの定義の復習：

(1) $[L_x,L_y]=L_{x\triangle y-y\triangle x}$,

(2) $\exists s\in V^*$ s.t. $\langle x\,|\,y\rangle := s(x\triangle y)$ は V の内積.

(3) $\forall x\in V$ に対して，L_x は実固有値のみ.

• (1) より $\mathfrak{h}:=\{L_v\ ;\ v\in V\}$ は $\mathfrak{gl}(V)=\mathcal{L}(V)$ の部分 Lie 代数になっていて，(3) より $\mathfrak{h}$ は分裂可解 Lie 代数になる．Lie の定理より，$\mathfrak{h}$ の各元，すなわち各 L_v $(v\in V)$ が下三角行列で表されるような V の基底がある．以下その基底を $e_1,\dots,e_n$ とする．

• $c\triangle c=c$ となる元 $c\neq 0$ をベキ等元という．

定理 10.1. V は次の条件をみたす V_{ji} $(1\leqq i\leqq j\leqq r)$ によって，$V=\sum V_{ji}\ \cdots(*)$ と直和分解される：

(1) $V_{ii}=\mathbb{R}E_i$ $(i=1,2,\dots,r)$,

(2) 各 V_{ji} 上では，$L_{E_k}=\frac{1}{2}(\delta_{jk}+\delta_{ki})I$，$R_{E_k}=\delta_{ki}I$.

この分解 $(*)$ をクラン V の正規分解という.

注意 10.2. 正規分解 $(*)$ があるとき，

(1) $E_i\triangle E_j=\delta_{ij}E_i$，すなわち $E_1,\dots,E_r$ は直交するべき等元.

(2) $\sum_{k=1}^{r}E_k=E$,

(3) $s(V_{ji})=0$ $(i<j)$.

(4) $x\in V$ が $L_{E_k}x=L_{E_l}x=\frac{1}{2}x$ $(k<l)$ をみたせば，$x\in V_{kl}$ となる.

実際，(1) は明らか．(2) については，$v\in V$ を $v=\sum_{i=1}^{r}\lambda_iE_i+\sum_{i<j}v_{kj}$ と表せば容易に $\left(\sum_{k=1}^{r}E_k\right)\triangle v=v$ がわかり，これより $s(v)=s\big(\big(\sum_{k=1}^{r}E_k\big)\triangle v\big)$ ゆえ，$E=\sum_{k=1}^{r}E_k$ がわかる．(3) は $v\in V_{ji}$ $(i<j)$ のとき，$E_j\triangle v-v\triangle E_j=\frac{1}{2}v$ の両辺に s を作用させればよい．(4) $x=\sum\lambda_iE_i+\sum x_{ji}$ とすると，$L_{E_k}x=L_{E_l}x=\frac{1}{2}x$ より容易に

$$\lambda_i=0\ \ (\forall i),\quad x_{ji}=(\delta_{kj}+\delta_{ki})x_{ji}=(\delta_{lj}+\delta_{li})x_{ji}\ \ (\forall i,j\ (i<j)).$$

後者の二つの等式より，$x_{ji}\neq 0$ なら $(j,i)=(l,k)$ が出る.

$\dim V=1$ なら定理は trivial なので，以下 $\dim V\geqq 2$ とする.

補題 10.3. $\exists c\in V$：ベキ等元，$\exists V'$：部分代数 s.t. $V=\mathbb{R}c\oplus V'$.

証明. $V' := \mathbb{R}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_r$ とおく．基底の定め方から $L_v(V') \subset V'$ $(\forall v \in V)$ である．とくに V' は部分代数であり，部分クランにもなっている．e_0 をクラン V' の主ベキ等元とし，$c := E - e_0$ とおく．このとき

$$c \triangle c := (E - e_0) \triangle (E - e_0) = E - e_0 = c$$

となるから，c もベキ等元で，明らかに $V = \mathbb{R}c \oplus V'$ である． □

定理 10.1 の証明. 定理を $n := \dim V$ に関する帰納法で証明する．単位元を持つクランで，次元が n より小さいものに対して定理が成り立つと仮定しよう．補題 10.3 のように，$V = \mathbb{R}c \oplus V'$ としておく．V' の主ベキ等元 e_0 により，$V' = V_{(1)} \oplus V_{(1/2)}$ と分解される．$V_{(1)}$ は単位元 e_0 を持つクランであるから，帰納法の仮定より，

$$\exists E_1, \ldots, E_{r-1} \ \text{ s.t. } \ V_{(1)} = \sum_{1 \leqq i \leqq j \leqq r-1} V_{ji}.$$

このとき，先に注意した様に，$e_0 = E_1 + \cdots + E_{r-1}$ である．
$V_{(1/2)}$ がどうなるか調べよう．$V_{(1)} \triangle V_{(1/2)} \subset V_{(1/2)}$ より，各 L_{E_i} $(1 = 1, \ldots, r-1)$ は $V_{(1/2)}$ を不変にする．

$$[L_{E_i}, L_{E_j}] = L_{E_i \triangle E_j - E_j \triangle E_i} = 0$$

より，L_{E_i} 達は互いに可換である．ゆえに，$V_{(1/2)}$ は L_{E_i} 達によって，同時一般固有空間分解できる：

$$V_{(1/2)} = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} N_{\boldsymbol{\alpha}} \qquad (\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}),$$
$$N_{\boldsymbol{\alpha}} := \{x \in V_{(1/2)} \ ; \ \exists m \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ (L_{E_i} - \alpha_i I)^m x = 0 \ \ (i = 1, \ldots, r-1)\}.$$

$N_{\boldsymbol{\alpha}} \neq \{0\}$ となる $\boldsymbol{\alpha}$ を求めよう．まず $V_{(1)}$ の $V_{(1/2)}$ への作用が derivation であり，$2I(x \triangle y) = (Ix) \triangle y + x \triangle (Iy)$ ゆえ，Leibniz の公式から

$$(L_{E_i} - 2\alpha_i I)^{2m}(x \triangle y) = \sum_{l=0}^{2m} \binom{2m}{l} \big((L_{E_i} - \alpha_i I)^{2m-l} x \triangle (L_{E_i} - \alpha_i)^l y\big).$$

したがって，$x, y \in N_{\boldsymbol{\alpha}}$ のとき，あらかじめ $(L_{E_i} - \alpha_i I)^m x = 0$，$(L_{E_i} - \alpha_i I)^m y = 0$ となる $m \in \mathbb{N}$ をとっておくと，$N_{\boldsymbol{\alpha}} \triangle N_{\boldsymbol{\alpha}}$ 上で $(L_{E_i} - 2\alpha_i I)^{2m} = 0$，すなわち $N_{\boldsymbol{\alpha}} \triangle N_{\boldsymbol{\alpha}}$ 上で $L_{E_i} - 2\alpha_i I$ はべき零である．一方で，$N_{\boldsymbol{\alpha}} \triangle N_{\boldsymbol{\alpha}} \neq \{0\}$ $(\because\ s(x \triangle x) = \|\, x \,\|^2)$ であり，$s(V_{ji}) = 0$ $(i < j)$ ゆえ，$\exists k_0$ $(1 \leqq k_0 \leqq r-1)$ s.t. $(N_{\boldsymbol{\alpha}} \triangle N_{\boldsymbol{\alpha}}) \cap V_{k_0 k_0} \neq \{0\}$．この k_0 に対しては $E_{k_0} \in N_{\boldsymbol{\alpha}} \triangle N_{\boldsymbol{\alpha}}$ であるから，$(L_{E_i} - 2\alpha_i I)^{m_0} E_{k_0} = 0$ となる最小の $m_0 \in \mathbb{N}$ をとると

$$0 = (L_{E_i} - 2\alpha_i I)^{m_0} E_{k_0} = (\delta_{ik} - 2\alpha_i)(L_{E_i} - 2\alpha_i I)^{m_0 - 1} E_{k_0}.$$

ゆえに $\alpha_i = \frac{1}{2}\delta_{ik_0}$ $(i = 1, \ldots, r-1)$．さらに次の主張が成り立つ．

$\boxed{\text{主張 1.}}$ $V_{ji} \neq V_{k_0k_0} \implies (N_{\boldsymbol{\alpha}} \triangle N_{\boldsymbol{\alpha}}) \cap V_{ji} = \{0\}$.

証明． 実際 $N_{\boldsymbol{\alpha}} \triangle N_{\boldsymbol{\alpha}} \subset V_{(1)}$ より，$x, y \in N_{\boldsymbol{\alpha}}$ のとき $x \triangle y = \lambda_{k_0}E_{k_0} + \sum_{(j,i)\neq(k_0,k_0)} v_{ji}$ と表す．このとき，任意の l $(1 \leqq l \leqq r-1)$ に対して，$m \in \mathbb{N}$ を選べば

$$\begin{aligned}
0 &= (L_{E_l} - \delta_{lk_0}I)^m(x \triangle y) = (L_{E_l} - \delta_{lk}I)^m\Big(\lambda_{k_0}E_{k_0} + \sum_{(j,i)\neq(k_0,k_0)} v_{ji}\Big) \\
&= (L_{E_l} - \delta_{lk_0}I)^{m-1} \sum_{(j,i)\neq(k_0,k_0)} \big(\tfrac{1}{2}(\delta_{li} + \delta_{lj}) - \delta_{lk_0}\big)v_{ji} \qquad (E_{k_0}\ \text{の係数} = 0) \\
&= \sum_{(j,i)\neq(k_0,k_0)} \big(\tfrac{1}{2}(\delta_{li} + \delta_{lj}) - \delta_{lk_0}\big)^m v_{ji}.
\end{aligned}$$

もし $v_{ji} = 0$ となる $(j,i) \neq (k_0, k_0)$ があったとすると，その i, j と任意の l $(1 \leqq l \leqq r-1)$ に対して，$\frac{1}{2}(\delta_{li} + \delta_{lj}) - \delta_{lk_0} = 0$．とくに $l = j$ に対しては，$\delta_{ji} + 1 = 2\delta_{jk_0}$．この式が成り立つには $j = i = k_0$ でないといけないが，その場合は除外している．ゆえに $v_{ji} = 0$ $(\forall(j,i) \neq (k_0.k_0))$． //

以上より，各 $k = 1, \ldots, r-1$ に対して，$\boldsymbol{\alpha}^{(k)} := \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_k$ (k 番目のみ $\frac{1}{2}$ で他は 0) とおくと，$N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}} \triangle N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}} \subset V_{kk}$ であり，

$$\begin{aligned}
&V_{(1/2)} = \sum_{k=1}^{r-1} N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}}, \\
&N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}} = \big\{x \in V_{(1/2)}\ ;\ \exists m \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. }\ (L_{E_i} - \tfrac{1}{2}\delta_{ik})^m x = 0\ \ (i = 1, \ldots, r-1)\big\}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{主張 2.}}$ $N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}} \triangle N_{\boldsymbol{\alpha}^{(j)}} \subset V_{kj}$ $(j < k)$.

証明． まず前と同様にして，$x \in N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}}$，$y \in N_{\boldsymbol{\alpha}^{(j)}}$ のとき，

$$(L_{E_k} - \tfrac{1}{2}I)^{m+m'}(x \triangle y) = \sum_{l=0}^{m+m'} \binom{m+m'}{l} \big(L_{E_k} - \tfrac{1}{2}I\big)^{m+m'-l} x \triangle (L_{E_k})^l y$$

であるから，m, m' を大きくとることにより，$L_{E_k} - \frac{1}{2}I$ は $N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}} \triangle N_{\boldsymbol{\alpha}^{(j)}}$ 上べき零であることがわかる．同様にして，$L_{E_j} - \frac{1}{2}I$ と L_{E_i} $(i \neq k, j)$ も $N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}} \triangle N_{\boldsymbol{\alpha}^{(j)}}$ 上べき零

である．さて，$x \in N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}}$，$y \in N_{\boldsymbol{\alpha}^{(j)}}$ のとき，$x \triangle y = v_{kj} + \sum_{(q,p)\neq(k,j)} v_{qp}$ と表すと，

$$\begin{aligned}0 &= \bigl(L_{E_k} - \tfrac{1}{2}I\bigr)^{m+m'}(x \triangle y) = \bigl(L_{E_k} - \tfrac{1}{2}I\bigr)^{m+m'}\Bigl(v_{kj} + \sum_{(q,p)\neq(k,j)} v_{qp}\Bigr) \\ &= \bigl(L_{E_k} - \tfrac{1}{2}I\bigr)^{m+m'-1} \sum_{(q,p)\neq(k,j)} \tfrac{1}{2}(\delta_{kq} + \delta_{kp} - 1)v_{qp} \\ &= \sum_{(q,p)\neq(k,j)} \bigl(\tfrac{1}{2}(\delta_{kq} + \delta_{kp} - 1)\bigr)^{m+m'} v_{qp}.\end{aligned}$$

他の 2 個の作用素も同様に考えて，$(q,p) \neq (k,j)$ に対して次式を得る：

$$\begin{aligned}&(\delta_{kq} + \delta_{kp} - 1)v_{qp} = 0, && \cdots\cdots ① \\ &(\delta_{jq} + \delta_{jp} - 1)v_{qp} = 0, && \cdots\cdots ② \\ &(\delta_{ip} + \delta_{iq})v_{qp} = 0 \ \ (\forall i \neq k, j). && \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

(i) $q = p$ のとき．$q = j$ なら②より $v_{jj} = 0$．また $q = k$ なら①より $v_{kk} = 0$．最後に $q \neq j, k$ なら③で $i = q$ として $v_{qq} = 0$．

(ii) $q > p$ のとき．$q = j$ なら（$p, q \neq k$ となるから）①より $v_{jp} = 0$．次に $q = k$ なら（$p, q \neq j$ となるから）②より $v_{kp} = 0$．最後に $q \neq j, k$ のとき，③で $i = p$ ととって $v_{qp} = 0$．　//

$\boxed{\text{主張 3.}}$ (1) $N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}} \perp N_{\boldsymbol{\alpha}^{(j)}}$ $(j \neq k)$，　(2) $L_{E_l} N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}} \subset N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}}$ $(\forall l = 1, \ldots, r-1)$，
(3) ${}^t L_{E_l} N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}} \subset N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}}$ $(\forall l = 1, \ldots, r-1)$．

証明．　(1) $x \in N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}}$，$y \in N_{\boldsymbol{\alpha}^{(j)}}$ のとき，$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = s(x \triangle y) \in s(V_{kj}) = 0$．
(2) $x \in N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}}$ のとき，$\bigl(L_{E_j} - \tfrac{1}{2}\delta_{jk}I\bigr)^m L_{E_l}x = L_{E_l}\bigl(L_{E_j} - \tfrac{1}{2}\delta_{jk}I\bigr)^m x = 0$．
(3) $j \neq k$，$x \in N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}}$，$y \in N_{\boldsymbol{\alpha}^{(j)}}$ のとき，

$$\langle\, {}^t L_{E_l}x \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, L_{E_l}y \,\rangle = 0 \quad (\because\ (1), (2)).\ //$$

$\boxed{\text{主張 3.}}$ $N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}}$ 上で，$L_{E_l} = \tfrac{1}{2}\delta_{lk}I$ かつ $R_{E_l} = 0$ $(l = 1, \ldots, r-1)$．

証明．　まず，$x, y \in N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}}$ のとき，
$\langle\, L_{E_l}x \,|\, y \,\rangle + \langle\, x \,|\, L_{E_l}y \,\rangle = s(L_{E_l}x \triangle y) + s(x \triangle L_{E_l}y) = s(L_{E_l}(x \triangle y)) = \delta_{lk}\langle\, x \,|\, y \,\rangle$．
ゆえに，$N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}}$ 上で $L_{E_l} + {}^t L_{E_l} = \delta_{lk}I$ $\cdots$ ④．ここで，$K := L_{E_l} - \tfrac{1}{2}\delta_{lk}$ を考えると，K の固有値はすべて実数である．一方，④より ${}^t K = \tfrac{1}{2}\delta_{lk} - L_{E_l} = -K$ であるから K の固有値は 0 か純虚数．したがって K の固有値はすべて 0 であり，歪対称であることから $K = 0$．よって最初の主張が言えた．第 2 の主張は $V_{(1/2)} \triangle V_{(1)} = \{0\}$ より．

以上を踏まえて，$V_{k0} := N_{\boldsymbol{\alpha}^{(k)}}$ $(k = 1, \ldots, r-1)$ とおく．$c = E - e_0$ であったから，$x \in V_{(1/2)}$ のとき

$$L_c x = L_E x - L_{e_0}x = x - \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}x, \qquad R_c x = x - R_{e_0}x = x.$$

さらに $u \in V_{(1)}$ のとき，

$$L_c u = L_e u - L_{e_0} u = u - u = 0, \qquad R_c u = R_E u - R_{e_0} u = u - u = 0.$$

よって，$E_0 := c$，$V_{00} := \mathbb{R}E_0$ とおくことにより，求める分解を得る． $\square$

命題 10.4. 正規分解 $(*)$ において：

(1) $V_{lk} \triangle V_{kj} \subset V_{lj}$, (2) $V_{lk} \triangle V_{ji} \subset \{0\}$ $(k \neq i, j)$,

(3) $V_{lk} \triangle V_{mk} \subset V_{lm}$ または V_{ml} （$l \geqq m$ または $m \geqq l$ に応じて）.

(4) V_{kj} 達は互いに直交する．

次に進む前に，次のことに注意しておこう.，すなわち，$x \in V_{ji}$ のとき，$x \triangle x \in V_{jj}$ ゆえ，$x \triangle x = \lambda E_j$ とおく．s を作用させると $\| x \|^2 = \lambda \cdot s(E_j)$ を得るから，

$$x \triangle x = \frac{\| x \|^2}{s(E_j)} \qquad (x \in V_{ji}).$$

ここで，$s(E_j) = s(E_j \triangle E_j) = \| E_j \|^2 > 0$ に注意しておく．

命題 10.5. V におけるベキ等元は $E_{i_1} + \cdots + E_{i_k}$ $(i_1 < \cdots < i_k)$ の形の元のみ．

証明． $v = \sum \lambda_i E_i + \sum_{j>i} v_{ji}$ はベキ等元とし，$\sum_{j>i} v_{ji} \neq 0$ とする．(j_0, i_0) $(j_0 > i_0)$ を，$v_{j_0 i_0} \neq 0$ で，$i < i_0$，または $i = i_0$, $j < j_0$ のとき $v_{ji} = 0$ となるものとする．V_{ji} $(i < j)$ 達の積で $V_{j_0 i_0}$ に落ちるのは $V_{j_0 i} \triangle V_{i i_0}$ $(j_0 > i > i_0)$，または $V_{j_0 i} \triangle V_{i_0 i}$ $(i < i_0 < j_0)$ のどちらかであるが，第 1 の場合は $v_{i i_0} = 0$，第 2 の場合は $v_{j_0 i} = v_{i_0 i} = 0$ より，どちらも 0 である．ゆえに $v \triangle v$ の $V_{j_0 i_0}$ 成分は

$$\left(\sum \lambda_i E_i\right) \triangle v_{j_0 i_0} + v_{j_0 i_0} \triangle \left(\sum \lambda_i E_i\right) = \Big(\tfrac{1}{2}(\lambda_{i_0} + \lambda_{j_0}) + \lambda_{i_0}\Big) v_{j_0 i_0} = \tfrac{1}{2}(3\lambda_{i_0} + \lambda_{j_0}) v_{j_0 i_0}.$$

v がベキ等元なので，

$$\tfrac{1}{2}(3\lambda_{i_0} + \lambda_{j_0}) = 1. \ \cdots\cdots \ ①$$

一方，$v \triangle v$ の V_{jj} 成分は $\lambda_j^2 + \sum_{i<j} s(E_j)^{-1} \| v_{ji} \|^2$ であるから

$$\lambda_j^2 + \sum_{i<j} \frac{\| v_{ji} \|^2}{s(E_j)} = \lambda_j. \ \cdots\cdots \ ②$$

②と $s(E_j) > 0$ より $\lambda_j^2 \leqq \lambda_j$ となるので，$0 \leqq \lambda_j \leqq 1$．とくに②で $j = i_0$ とすると，$v_{i_0 i} = 0$ $(\forall i < i_0)$ ゆえ $\lambda_{i_0}^2 = \lambda_{i_0}$．これより $\lambda_{i_0} = 0, 1$．このとき①より，$\lambda_{j_0} = 2, -1$．これは $0 \leqq \lambda_{j_0} \leqq 1$ に反する．ゆえに $v_{ji} = 0$ for $\forall i, j$ $(i < j)$．ゆえに $v = \sum \lambda_i E_i$ で，このときは係数 λ_i は 0 か 1 である． $\square$

系 10.6. c がベキ等元であるとき，$V_c := \{x \in V \,;\, c \triangle x = x\}$ とおく．$\dim V_c = 1$ となるベキ等元 c は E_i $(i = 1, \ldots, r)$ のみである．

証明. 　命題より，$c = E_{i_1} + \cdots + E_{i_k}$ $(i_1 < \cdots < i_k)$ の形である．このとき，$V_c = \sum_{s \leqq t} V_{i_t i_s}$ となる．ゆえに，$\dim V_c = 1 \iff k = 1$.

定義 10.7. 正規分解に現れる r は，V の中の異なる原始ベキ等元 (すなわち $\dim V_c = 1$ であるベキ等元）の個数に等しい．この r をクラン V の階数と呼ぶ．

命題 10.8. $V = \sum_{i \leqq j} V^{(1)}_{ji} = \sum_{i \leqq j} V^{(2)}_{ji}$: V の正規分解．このとき，$\exists \sigma \in \mathfrak{S}_r$ s.t.
(1) $i \leqq j$ かつ $\sigma(i) \leqq \sigma(j)$ ならば，$V^{(2)}_{ji} = V^{(1)}_{\sigma(j)\sigma(i)}$.
(2) $i < j$ かつ $\sigma(i) > \sigma(j)$ ならば $V^{(2)}_{ji} = V^{(1)}_{\sigma(i)\sigma(j)} = \{0\}$.

証明. 　系 10.6 より，$\exists \sigma \in \mathfrak{S}_r$ s.t. $E^{(2)}_i = E^{(1)}_{\sigma(i)}$. このとき，$V^{(2)}_{ii} = V^{(1)}_{\sigma(i)\sigma(i)}$.
さらに $i < j$ とすると

$$\begin{aligned} V^{(2)}_{ji} &= \{x \in V \,;\, E^{(2)}_i \triangle x = E^{(2)}_j \triangle x = \tfrac{1}{2}x,\, x \triangle E^{(2)}_i = x\}, \\ &= \{x \in V \,;\, E^{(1)}_{\sigma(i)} \triangle x = E^{(1)}_{\sigma(j)} \triangle x = \tfrac{1}{2}x,\, x \triangle E^{(1)}_{\sigma(i)} = x\}. \end{aligned}$$

ゆえに，$\sigma(i) < \sigma(j)$ ならば，$V^{(2)}_{ji} = V^{(1)}_{\sigma(j)\sigma(i)}$. 次に $\sigma(i) > \sigma(j)$ とする．$x \in V^{(2)}_{ji}$ ならば，上の式と注意 10.2 より $x \in V^{(1)}_{\sigma(i)\sigma(j)}$ となるが，

$$x = x \triangle E^{(1)}_{\sigma(i)} \in V^{(1)}_{\sigma(i)\sigma(j)} \triangle V^{(1)}_{\sigma(i)\sigma(i)} = \{0\}$$

である． □

例 10.9. 正規分解が $V = V^{(1)}_{11} + V^{(1)}_{22} + V^{(1)}_{33} + V^{(1)}_{21} + V^{(1)}_{31} = V^{(2)}_{11} + V^{(2)}_{22} + V^{(2)}_{33} + V^{(2)}_{21} + V^{(2)}_{31}$ となることがある．このときは，実際 $\sigma = (2\ \ 3)$（互換）を考えれば，$V^{(2)}_{32} = V^{(1)}_{32} = \{0\}$ である．

§11. クランから得られる等質開凸錐

以下 $V=(V,\triangle)$：単位元 E を持つクラン．クランの定義の復習：

(1) $[L_x,L_y]=L_{x\triangle y-y\triangle x}$，

(2) $\exists s\in V^*$ s.t. $\langle\,x\,|\,y\,\rangle:=s(x\triangle y)$ は V の内積.

(3) $\forall x\in V$ に対して，L_x は実固有値のみ.

$V=\sum_{1\leqq i\leqq j\leqq r}V_{ji}$：$V$ の正規分解.

$V_{jj}=\mathbb{R}E_j$，$E_1+\cdots+E_r=E$．$V_{ji}=\left\{v\in V\ ;\ L_{E_k}v=\frac{1}{2}(\delta_{ki}+\delta_{kj})v,\ R_{E_k}v=\delta_{ki}v\right\}$.

$\mathfrak{h}:=\{L_v\ ;\ v\in V\}$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数.

$V\ni v\mapsto L_v\in\mathfrak{h}$ は線型同型.

（なぜなら，V は単位元を持つので，$L_v=0\implies v=L_vE=0$ であるので.）

$\mathfrak{a}:=\sum_{i=1}^{r}\mathbb{R}L_{E_i}$，$\mathfrak{n}_{ji}:=\{L_x\ ;\ x\in V_{ji}\}$，$\mathfrak{n}:=\sum_{j>i}\mathfrak{n}_{ji}$ とおくと，$\mathfrak{h}=\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ である.

以下，$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$：$L_{E_1},\ldots,L_{E_r}$ に双対な $\mathfrak{a}^*$ の基底．すなわち，

$$\alpha_i(L_{E_j})=\delta_{ij}\qquad(i,j=1,\ldots,r).$$

命題 11.1.　(1) $\mathfrak{a}$ は可換 Lie 代数.

(2) $\mathfrak{n}_{ji}=\{X\in\mathfrak{h}\ ;\ [A,X]=\frac{1}{2}(\alpha_j-\alpha_i)(A)X\ \ (\forall A\in\mathfrak{a})\}$.

(3) $\mathfrak{n}$ はべき零 Lie 代数である.

(4) $[\mathfrak{a},\mathfrak{n}]\subset\mathfrak{n}$.

証明.　(1) $E_i\triangle E_j=\delta_{ij}E_i$ と，$[L_{E_i},L_{E_j}]=L_{E_i\triangle E_j-E_j\triangle E_i}$ より.

(2) $X\in\mathfrak{n}_{ji}$ のとき，$X=L_v$ $(v\in V_{ji})$ より

$$[L_{E_k},X]=[L_{E_k},L_v]=L_{E_k\triangle v-v\triangle E_k}=\left(\tfrac{1}{2}(\delta_{kj}+\delta_{ki})-\delta_{ki}\right)L_v=\tfrac{1}{2}(\delta_{kj}-\delta_{ki})X.$$

ゆえに，各 $A\in\mathfrak{a}$ を $A=\sum_k\alpha_k(A)L_{E_k}$ と表すとき，$[A,X]=\frac{1}{2}(\alpha_j-\alpha_i)(A)X$.

逆に $[A,L_x]=\frac{1}{2}(\alpha_j-\alpha_i)(A)L_x$ $(x\in V)$ なら，$A=L_{E_j},L_{E_i}$ として E に作用させて，

$$E_j\triangle x-x\triangle E_j=\tfrac{1}{2}x,\quad E_i\triangle x-x\triangle E_i=-\tfrac{1}{2}x.$$

$x=\sum_{l\geqq k}x_{lk}$ と表して係数比較をすれば，$(l,k)\neq(j,i)$ 以外はすべての $x_{lk}=0$ が出るので，$x=x_{ji}\in V_{ji}$，すなわち $L_x\in\mathfrak{n}_{ji}$ である.

(3) $\mathcal{C}^0\mathfrak{n}:=\mathfrak{n}$，$\mathcal{C}^k\mathfrak{n}:=[\mathfrak{n},\mathcal{C}^{k-1}\mathfrak{n}]$ $(k=1,2,\ldots)$ とおいて，$\mathfrak{n}$ の降中心列 $\{\mathcal{C}^k\mathfrak{n}\}$ を定義するとき,，$\exists k$ s.t. $\mathcal{C}^k\mathfrak{n}=\{0\}$ を示そう．そのために次の主張を示す．この主張から (3) は明らかである.

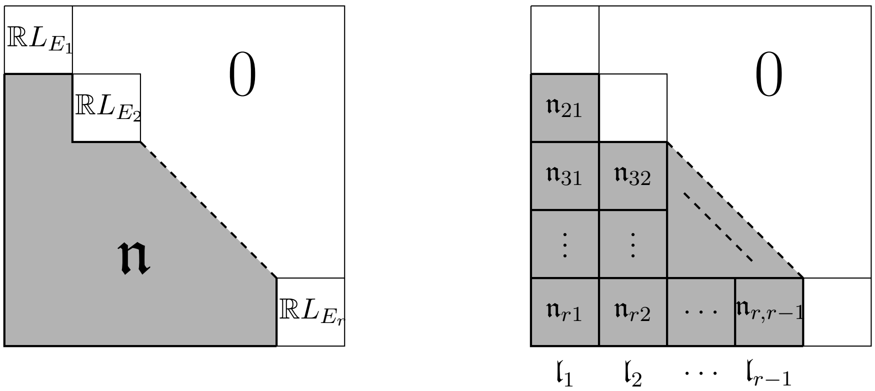
$\boxed{\text{主張}}$ $\mathcal{C}^k\mathfrak{n} \subset \sum_{j-i>k} \mathfrak{n}_{ji}$.

$\because$) $k=0$ のときは明らかに正しい．$k \geqq 1$ とし，k のときは正しいとする．
$A \in \mathfrak{a}$，$X \in \mathfrak{n}_{ji}$ $(j-i \geqq 1)$，$Y \in \mathfrak{n}_{ml}$ $(m-l>k)$ のとき，

$$\begin{aligned}[A,[X,Y]] &= [[A,X],Y]+[X,[A,Y]] = \tfrac{1}{2}(\alpha_j-\alpha_i)(A)[X,Y]+\tfrac{1}{2}(\alpha_m-\alpha_l)(A)[X,Y] \\ &= \tfrac{1}{2}(\alpha_j-\alpha_i+\alpha_m-\alpha_l)(A)[X,Y]. \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

$[X,Y] \neq 0$ ならば，(2) より，$j>i=m>l$ または $m>l=j>i$ である．
(i) $j>i=m>l$ なら，①より $[X,Y] \in \mathfrak{n}_{jl}$ であり，$j-l=(j-i)+(m-l)>1+k$.
(ii) $m>l=j>i$ なら，①より $[X,Y] \in \mathfrak{n}_{mi}$ で，$m-i=(m-l)+(j-i)>k+1$.
どちらにしても，$[X,Y] \in \sum_{q-p>k+1} \mathfrak{n}_{qp}$.
以上と帰納法の仮定より，$\mathcal{C}^{k+1}\mathfrak{n} \subset \sum_{q-p>k+1} \mathfrak{n}_{qp}$ が成り立つ．
(4) $\mathfrak{n}_{ji}$ が $\mathrm{ad}\,\mathfrak{a}$ の同時固有空間であるということから． $\square$

命題 11.1 より，$\mathfrak{h}=\mathfrak{n} \rtimes \mathfrak{a}$（半直積）となることがわかる．

$\mathfrak{h} =$ 

以下，$\mathfrak{l}_i := \mathfrak{n}_{i+1,i}+\cdots+\mathfrak{n}_{ri}$ $(i=1.\ldots,r-1)$ とおく．明らかに，$\mathfrak{n}=\sum_{i=1}^{r-1}\mathfrak{l}_i$ となる．

補題 11.2. (1) $[\mathfrak{l}_i,\mathfrak{l}_i]=\{0\}$ $(i=1,\ldots,r-1)$. (2) $[\mathfrak{l}_j,\mathfrak{l}_i] \subset \mathfrak{l}_i$ $(j>i)$.

証明. (1) $V^i := \sum_{k=i+1}^{r} V_{ki} + \sum_{k \geqq j \geqq i+1} V_{kj}$ とおくと，V^i は $e_0 := E_i+E_{i+1}+\cdots+E_r$ を主ベキ等元とするクランである．この e_0 に関する V^i の主分解を $V^i=V^i_{(1)}+V^i_{(1/2)}$ とする．容易に，$V^i_{(1)}=\sum_{k \geqq j \geqq i+1} V_{kj}$ であり，$V^i_{(1/2)}=\sum_{k=i+1}^{r} V_{ki}$ であることがわかる．
(1) $x \in V_{ki}$ $(k>i)$，$y \in V_{k'i}$ $(k'>i)$ ならば，$x,y \in V^i_{(1/2)}$ ゆえ $x \triangle y = y \triangle x$．よって $[L_x,L_y]=L_{x\triangle y - y \triangle x}=0$．これよりただちに $[\mathfrak{l}_i,\mathfrak{l}_i]=\{0\}$ が出る．
(2) $j>i$ とし，$x \in V_{kj}$，$y \in V_{k'i}$ $(j>i)$ とする．$x \in V^i_{(1)}$ であり，$y \in V^i_{(1/2)}$ ゆえ，

$y \triangle x = 0$. したがって，$[L_x, L_y] = L_{x \triangle y}$ となり，$x \triangle y \in V_{kj} \triangle V_{k'i} \subset V_{ki} \subset V^i_{(1/2)}$. 以上から直ちに $[\mathfrak{l}_j, \mathfrak{l}_i] \subset \mathfrak{l}_i$ が出る. □

以下，$A := \exp \mathfrak{a}$，$N := \exp \mathfrak{n}$ とおく．A は可換 Lie 群，N はベキ零 Lie 群である．また $\mathfrak{h}$ は分裂可解 Lie 群ゆえ，対応する単連結で連結 Lie 群 H は $H = \exp \mathfrak{h}$ となる．さらに $H = N \rtimes A$（半直積群）となる．

この Lie 群 H の乗法公式を明示的に記述できる．各 $h \in H$ を

$$\begin{aligned} h &= (\exp t_1 L_{E_1})(\exp L_1)(\exp t_2 L_{E_2}) \cdots (\exp L_{r-1})(\exp t_r L_{E_r}), \\ &\quad t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{R}, \qquad L_k \in \mathfrak{l}_k \ \ (k = 1, \ldots, r-1). \end{aligned} \tag{11.1}$$

さらに $L_k = L_{k+1,k} + \cdots + L_{rk}$ $(L_{lk} \in \mathfrak{n}_{lk})$ と表し，$L_{lk} = L_{v_{lk}}$ $(v_{lk} \in V_{lk})$ とする．

命題 11.3. $h, h' \in H$ を (11.1)のように表し（h' はすべて $'$ をつける），$h'' = hh''$ とおく．h'' を (11.1)のように表すとき（すべて $''$ をつける），

$$t''_k = t_k + t'_k \quad (k = 1, \ldots, r), \tag{11.2}$$

$$v''_{mk} = e^{t_m/2} v'_{mk} + \sum_{k<l<m} v_{ml} \triangle v'_{lk} + e^{t'_k/2} v_{mk} \quad (1 \leqq k < m \leqq r). \tag{11.3}$$

証明. 以下，Ad は Lie 群 H の随伴表現を表すとする．$X \in \mathfrak{h}$，$h \in H$ に対して，

$$\mathrm{Ad}(\exp X) = \exp(\mathrm{ad}\, X), \quad h(\exp X)h^{-1} = \exp((\mathrm{Ad}\, h)X)$$

が成り立つことに注意．以下では，簡単のため $\exp(\mathrm{ad}\, X)$ を $e^{\mathrm{ad}\, x}$ と書く．

まず $i \leqq k$ とするとき，

$$(\exp L_k)(\exp L'_i) = \big(\exp \mathrm{Ad}(\exp L_k) L'_i\big)(\exp L_k) = (\exp e^{\mathrm{ad}\, L_k} L'_i)(\exp L_k). \tag{11.4}$$

同様に $i \leqq k$ として，

$$(\exp t_k L_{E_k})(\exp L'_i) = (\exp e^{\mathrm{ad}\, t_k L_{E_k}} L'_i) \exp(t_k L_{E_k}), \tag{11.5}$$

$$(\exp L_k)(\exp t'_i L_{E_i}) = \begin{cases} (\exp t'_i L_{E_i})(\exp L_k) & (i < k), \\ (\exp t'_k L_{E_k})(\exp e^{-\mathrm{ad}\, t'_k L_{E_k}} L_k) & (i = k). \end{cases} \tag{11.6}$$

そうすると，(11.6)より

$$\begin{aligned} &h\,(\exp t'_1 L_{E_i}) \\ &\quad = \big(\exp(t_1 + t'_1) L_{E_1}\big)(\exp e^{-\mathrm{ad}\, t'_1 L_{E_1}} L_1)(\exp t_2 L_{E_2}) \cdots (\exp L_{r-1})(\exp t_r L_{E_r}). \end{aligned}$$

次に (11.4)，(11.5)より

$$\begin{aligned} &h\,(\exp t'_1 L_{E_1})(\exp L'_1) \\ &\quad = \big(\exp(t_1 + t'_1) L_{E_1}\big)(\exp e^{-\mathrm{ad}\, t'_1 L_{E_1}} L_1)(\exp e^{\mathrm{ad}\, t_2 L_{E_2}} e^{\mathrm{ad}\, L_2} \cdots e^{\mathrm{ad}\, L_{r-1}} e^{\mathrm{ad}\, t_r L_{E_r}} L'_1) \\ &\qquad \times (\exp t_2 L_{E_2}) \cdots (\exp L_{r-1})(\exp t_r L_{E_r}). \end{aligned}$$

これを繰り返して，$[\mathfrak{l}_i,\mathfrak{l}_i]=\{0\}$ を思い出すと

$$\begin{aligned}&t''_k=t_k+t'_k,\\&L''_k=e^{-\operatorname{ad}t'_kL_{E_k}}L_k+e^{\operatorname{ad}t_{k+1}L_{E_{k+1}}}e^{\operatorname{ad}L_{k+1}}\cdots e^{\operatorname{ad}L_{r-1}}e^{\operatorname{ad}t_rL_{E_r}}L'_k.\end{aligned}$$

これでまず (11.2)が出た．次に (11.3)を示すために，$k>i$ のとき，$j>i=m>k$ は起こらないことに注意すると

$$[\mathfrak{l}_k,[\mathfrak{l}_k,\mathfrak{l}_i]]\subset\left[\mathfrak{l}_k,\left[\sum_{m>k}\mathfrak{n}_{mk},\sum_{l>i}\mathfrak{n}_{li}\right]\right]\subset\left[\mathfrak{l}_k,\sum_{m>k}\mathfrak{n}_{mi}\right]\subset\sum_{m'>k}\sum_{m>k}[\mathfrak{n}_{m'k},\mathfrak{n}_{mi}]=\{0\}.$$

したがって

$$e^{\operatorname{ad}L_k}L'_i=L'_i+[L_k,L'_i]=L'_i+[L_k,L'_{ki}].$$

また，明らかに

$$e^{\operatorname{ad}t_kL_{E_k}}L'_i=e^{t_k/2}L'_{ki}+\sum_{l\neq k,\,l>i}L'_{li}\quad(\text{if } i<k)$$

であり，$e^{-\operatorname{ad}t'_kL_{E_k}}L_k=e^{t'_k/2}L_k$ である．ゆえに $m>k$ のとき，

$$\begin{aligned}&e^{\operatorname{ad}t_{k+1}L_{E_{k+1}}}e^{\operatorname{ad}L_{k+1}}\cdots e^{\operatorname{ad}L_{r-1}}e^{\operatorname{ad}t_rL_{E_r}}L'_k\\
&\quad=e^{\operatorname{ad}t_{k+1}L_{E_{k+1}}}e^{\operatorname{ad}L_{k+1}}\cdots e^{\operatorname{ad}L_{r-1}}\Bigl(e^{t_r/2}L'_{rk}+\sum_{l\neq r,\,l>k}L'_{lk}\Bigr)\\
&\quad=e^{\operatorname{ad}t_{k+1}L_{E_{k+1}}}e^{\operatorname{ad}L_{k+1}}\cdots e^{\operatorname{ad}t_{r-1}L_{E_{r-1}}}\Bigl(e^{t_r/2}L'_{rk}+\sum_{l\neq r,\,l>k}L'_{lk}+[L_{r,r-1},L'_{r-1,k}]\Bigr)\\
&\quad=e^{\operatorname{ad}t_{k+1}L_{E_{k+1}}}e^{\operatorname{ad}L_{k+1}}\cdots e^{\operatorname{ad}L_{r-2}}\Bigl(e^{t_r/2}L'_{rk}+[L_{r,r-1},L'_{r-1,k}]\\
&\qquad\qquad+e^{t_{r-1}/2}L'_{r-1,k}+\sum_{\substack{l\neq r,r-1\\ l>k}}L'_{lk}\Bigr)\\
&\quad=e^{\operatorname{ad}t_{k+1}L_{E_{k+1}}}e^{\operatorname{ad}L_{k+1}}\cdots e^{\operatorname{ad}t_{r-2}L_{E_{r-2}}}\Bigl(e^{t_r/2}L'_{rk}+[L_{r,r-1},L'_{r-1,k}]+e^{t_{r-1}/2}L'_{r-1,k}\\
&\qquad\qquad+\sum_{\substack{l\neq r,r-1\\ l>k}}L'_{lk}+[L_{r,r-2}+L_{r-1,r-2},L'_{r-2,k}]\Bigr).\end{aligned}$$

したがって，$e^{\operatorname{ad}t_{k+1}L_{E_{k+1}}}e^{\operatorname{ad}L_{k+1}}\cdots e^{\operatorname{ad}L_{r-1}}e^{\operatorname{ad}t_rL_{E_r}}L'_k$ の $\mathfrak{n}_{mk}$ 成分は

$$e^{t_m/2}L'_{mk}+\sum_{k<l<m}[L_{ml},L'_{lk}].$$

以上より

$$L''_{mk}=e^{t'_k/2}L_{mk}+\sum_{k<l<m}[L_{ml},L'_{lk}]+e^{t_m/2}L'_{mk}$$

となり，両辺の作用素を E に作用させて，(11.3)を得る． □

命題 11.4. $h \in H$ を (11.1)のように表し，$hE = x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k E_k + \sum_{m>k} X_{mk}$ とすると

$$\lambda_k = e^{t_k} + \tfrac{1}{2} s(E_k)^{-1} \sum_{i<k} \| v_{ki} \|^2,$$
$$X_{mk} = e^{t_k/2} v_{mk} + \sum_{i<k} v_{mi} \triangle v_{ki}.$$

証明. $l > i$ とすると，$[\mathfrak{l}_l, E_i] = \{0\}$ より $(\exp L_l)E_i = E_i$．また $(\exp t_l)E_i = E_i$．ゆえに

$$hE_i = (\exp t_1 L_{E_1}) \dots (\exp L_{i-1})\big((\exp t_i L_{E_i})(\exp L_i)E_i\big).$$

ここで，$m > i$ のとき $V_{mi} \triangle E_i \subset V_{mi}$ より，$(\exp L_i)E_i \in \sum_{m>i} V_{mi}$．したがってまた，$(\exp t_i L_{E_i})(\exp L_i)E_i \in \sum_{m>i} V_{mi}$．ここで $h < i$ のとき，$\exp L_{E_h}$ も $\exp L_h$ も $\sum_{m>i} V_{mi}$ 上 trivial ゆえ

$$hE_i = (\exp t_i L_{E_i})(\exp L_i)E_i.$$

ここで，$L_i E_i \in \sum_{m>i} V_{mi}$，$L_i^2 E_i \in \sum_{m' \geqq m > i} V_{m'm}$ であるから，$L_i^3 E_i = 0$．よって

$$hE_i = (\exp t_i L_{E_i})\big(E_i + L_i E_i + \tfrac{1}{2} L_i^2 E_i\big) = e^{t_i} E_i + e^{t_i/2} L_i E_i + \tfrac{1}{2} L_i^2 E_i.$$

さらにここで

$$L_i E_i = \sum_{m>i} L_{v_{mi}} E_i = \sum_{m>i} v_{mi}$$

であり，

$$L_i^2 E_i = \sum_{m>i} L_{v_{mi}}^2 E_i + 2 \sum_{m'>m>i} L_{v_{mi}} L_{v_{m'i}} E_i = \sum_{m>i} v_{mi} \triangle v_{mi} + 2 \sum_{m'>m>i} v_{mi} \triangle v_{m'i}.$$

$v_{mi} \triangle v_{mi} \in \mathbb{R}E_m$ であるから，$v_{mi} \triangle v_{mi} = \lambda_m E_m$ とおいて，両辺に s を作用させると，$\| v_{mi} \|^2 = \lambda_m \cdot s(E_m)$．ここで $s(E_m) = s(E_m \triangle E_m) = \| E_m \|^2 \neq 0$ に注意．ゆえに $\lambda_m = s(E_m)^{-1} \| v_{mi} \|^2$ となるから，$v_{mi} \triangle v_{mi} = s(E_m)^{-1} \| v_{mi} \|^2 \cdot E_m$．以上から，

$$\begin{aligned} hE &= \sum_{m=1}^{r} e^{t_m} E_m + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \sum_{m>i} s(E_m)^{-1} \| v_{mi} \|^2 E_m + e^{t_i/2} \sum_{m>i} v_{mi} + \sum_{m'>m>i} v_{mi} \triangle v_{m'i} \\ &= \sum_{m=1}^{r} \Big(e^{t_m} + \tfrac{1}{2} s(E_m)^{-1} \sum_{i<m} \| v_{mi} \|^2 \Big) E_m + \sum_{m>k} \Big(e^{t_k/2} v_{mk} + \sum_{i<k} v_{ki} \triangle v_{mi} \Big). \end{aligned}$$

これより命題の公式を得る． $\square$

注意 11.5. 逆に，$x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k E_k + \sum_{k<m} X_{mk}$ が与えられたとき，t_k $(k = 1, \ldots, r)$，v_{mk} を解くことができる．以下，簡単のため $s(E_k) = \frac{1}{2}$ $(\forall k)$ と s を正規化しておこう[1]．$x^{(1)} := x$ とし，$x^{(i)} = \sum_{k=i}^{r} \lambda_k^{(i)} E_k + \sum_{m>k \geqq i} X_{mk}^{(i)}$ が定まったとき，

$$\lambda_k^{(i+1)} := \lambda_i^{(i)} \lambda_k^{(i)} - \| X_{ki}^{(i)} \|^2 \qquad (k = i+1, \ldots, r),$$

$$X_{mk}^{(i+1)} := \lambda_i^{(i)} X_{mk}^{(i)} - X_{mi}^{(i)} \triangle X_{ki}^{(i)} \quad (i+1 \leqq k < m \leqq r),$$

とおき，

$$D_k(x) := \lambda_k^{(k)} \quad (k = 1, \ldots, r), \qquad Y_{mk}(x) := X_{mk}^{(k)} \quad (1 \leqq k < m \leqq r).$$

とくに，$D_1(x) = \lambda_1^{(1)} = \lambda_1$，$Y_{m1}(x) = X_{m1}^{(1)} = X_{m1}$ である．このとき，

$$e^{t_k} = \frac{D_k(x)}{\prod_{i=1}^{k-1} D_i(x)} \qquad (k = 1, \ldots, r),$$

$$v_{mk} = e^{-t_k/2} \frac{Y_{mk}}{\prod_{i=1}^{k-1} D_i(x)} \qquad (1 \leqq k < m \leqq r).$$

$\Omega = HE$：E を通る H の軌道.

定理 11.6. Ω は開凸錐であって，

$$\Omega = \{x \in V \; ; \; D_1(x) > 0, \ldots, D_r(x) > 0\}$$

[1] $s = \frac{1}{2} E^*$ ととることを意味する．

§12. 等質開凸錐に付随するガンマ函数

$\mathbb{R}_{>0}$ は 1 次元の等質錐.

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt \qquad (s > 0). \quad \cdots\cdots ①$$

これを一般の等質開凸錐上の積分に拡張することを考える.

まず①において,

(1) $\dfrac{dt}{t}$ は $\mathbb{R}_{>0}$ 上の $GL(\mathbb{R}_{>0})$ 不変測度. すなわち, 変数を正の数倍することで不変.

(2) $s \in \mathbb{R}$ を固定するとき, $t \mapsto t^s$ は, 乗法群 $\mathbb{R}_{>0} = GL(\mathbb{R}_{>0})$ の 1 次元表現.

Ω：実ベクトル空間 V 内の等質開凸錐.

Ω は単位元 E を持つクラン $(V, \triangle)$ から得られたものとしてよい.

すなわち, $\mathfrak{h} := \{L_v \,;\, v \in V\}$ をクランの左乗法作用素全体がなす Lie 代数とするとき, $H := \exp \mathfrak{h}$ の E を通る軌道が Ω であるとしてよい.

$E_1, \ldots, E_r$：クラン V の原始べき等元の完全直交系.

$$E_i \triangle E_j = \delta_{ij} E_i, \qquad E_1 + \cdots + E_r = E.$$

$\langle\, x \,|\, y \,\rangle := s(x \triangle y)$ は V の内積. $s(E_k) = 1\ (\forall k = 1, \ldots, r)$ と正規化しておく.

$\Omega^* := \bigl\{ y \in V \,;\, \langle\, x \,|\, y \,\rangle > 0 \ \ (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}) \bigr\}$：$\Omega$ の双対錐.

ϕ：Ω の特性函数で次で定義されるもの.

$$\phi(x) := \int_{\Omega^*} e^{-\langle\, x \,|\, y \,\rangle}\, dy \qquad (x \in \Omega).$$

$\phi(gx) = |\det g|^{-1} \phi(x)$ $(g \in GL(\Omega),\ x \in \Omega)$ であった. したがって, $\phi(x)\, dx$ は Ω 上の $GL(\Omega)$ 不変測度である.

$V = \sum_{1 \leqq i \leqq j \leqq r} V_{ji}$：クラン V の正規分解.

$V_{jj} = \mathbb{R} E_j$ であり, $i < j$ のとき

$$V_{ji} = \bigl\{ v \in V \,;\, L_{E_k} v = \tfrac{1}{2}(\delta_{kj} + \delta_{ki}) v,\ R_{E_k} v = \delta_{ki} v \ \ (\forall k = 1, \ldots, r) \bigr\}.$$

$\mathfrak{a} := \sum_{j=1}^{r} \mathbb{R} L_{E_j}$, $\mathfrak{n}_{ji} := \{L_v \,;\, v \in V_{ji}\}$ $(i < j)$, $\mathfrak{n} := \sum_{i<j} \mathfrak{n}_{ji}$ とおくと, $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{h}$ の部分 Lie 代数で, $\mathfrak{a}$ は可換, $\mathfrak{n}$ はベキ零である. そして $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ であり, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$.

$A := \exp \mathfrak{a}$, $N := \exp \mathfrak{n}$ とすると, $H = N \rtimes A$（半直積）である.

A の 1 次元実表現は $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ をパラメータとして,

$$\chi_{\boldsymbol{s}}\bigl(\exp(t_1 L_{E_1} + \cdots + t_r L_{E_r})\bigr) = \exp \sum_{j=1}^{r} s_j t_j.$$

$\chi_{\boldsymbol{s}}$ を H に，$\chi_{\boldsymbol{s}}(na)=\chi_{\boldsymbol{s}}(a)$ $(n\in N,\, a\in A)$ で拡張する．

● χ_h は H の 1 次元表現になっている．

$\because$) $h,h'\in H$，$h=na$，$h'=n'a'$ $(n,n'\in N,\, a,a'\in A)$ とすると

$$\chi_{\boldsymbol{s}}(hh')=\chi_{\boldsymbol{s}}(nan'a')=\chi\bigl(n(an'a^{-1})aa'\bigr).$$

ここで A は N を正規化するので，$an'a^{-1}\in N$ ゆえ，hh' の NA 分解は，$n(an'a^{-1})aa'$．ゆえに

$$\chi_{\boldsymbol{s}}(hh')=\chi_{\mathbf{s}}(aa')=\chi_{\boldsymbol{s}}(a)\chi_{\boldsymbol{s}}(a')=\chi_{\boldsymbol{s}}(na)\chi_{\boldsymbol{s}}(n'a')=\chi_{\boldsymbol{s}}(h)\chi_{\boldsymbol{s}}(h').//$$

H は Ω に単純推移的に作用する．したがって，hE は一意的に Ω の元を表すことに注意すると，

$$\Delta_{\boldsymbol{s}}(hE):=\chi_{\mathbf{s}}(h)\quad(h\in H).$$

によって，Ω 上の函数 $\Delta_{\boldsymbol{s}}$ を定義することができる．明らかに，$\Delta_{\boldsymbol{s}}(h_0x)=\chi_{\boldsymbol{s}}(h_0)(x)$ $(h_0\in H,\, x\in\Omega)$ が成り立つ．

定義 12.1. $\tilde{\mathit{\Gamma}}_\Omega(\boldsymbol{s}):=\displaystyle\int_\Omega e^{-\langle x\,|\,E\,\rangle}\Delta_{\boldsymbol{s}}(x)\phi(x)\,dx.$

積分の収束等は何も言ってないが，被積分函数は正の函数なので，$+\infty$ を許せば積分はつねに存在している．

まず，$\phi(x)$ は $\phi(E)\Delta_{\boldsymbol{s}_0}(x)$ $(\boldsymbol{s}_0\in\mathbb{R}^r)$ と書けることを示そう．$\phi(hE)=(\det h)^{-1}\phi(E)$ $(h\in H)$ であるから，$\det h$ が $\chi_{\boldsymbol{s}}$ の形だとよい．$h=\exp\sum_{j=1}^r t_jL_{E_j}\in A$ のとき，

$$\det\Bigl(\exp\sum_{j=1}^r t_jL_{E_j}\Bigr)=\exp\Bigl(\sum_{j=1}^r t_j\operatorname{Tr}L_{E_j}\Bigr).$$

ここで，L_{E_j} は，$V_{jj}=\mathbb{R}E_j$ を 1 固有空間，V_{kj} $(k>j)$ と V_{ji} $(i<j)$ を $\frac12$ 固有空間に持つ．

$$d_j:=1+\frac12\Bigl(\sum_{k>j}\dim V_{kj}+\sum_{i<j}\dim V_{ji}\Bigr)\qquad(j=1,\dots,r)$$

とおくと，$\operatorname{Tr}L_{E_j}=d_j$．ゆえに $\det(a)=\chi_{\boldsymbol{d}}(a)$ $(\forall a\in A)$．よって，$\det h=\chi_{\boldsymbol{d}}(h)$ $(h\in H)$ である．ゆえに $\phi(x)=\phi(E)\Delta_{-\boldsymbol{d}}(x)$ となるので，次式で $\mathit{\Gamma}_\Omega$ の定義とする．

$$\mathit{\Gamma}_\Omega(\boldsymbol{s}):=\int_\Omega e^{-\langle x\,|\,E\,\rangle}\Delta_{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{d}}(x)\,dx$$

以下，$\Gamma_\Omega(\boldsymbol{s})$ は通常のガンマ関数の積で表されることを示そう．そのために先週の復習をする．

$$\begin{gathered}h=(\exp t_1L_{E_1})(\exp L_1)(\exp t_2L_{E_2})\cdots(\exp L_{r-1})(\exp t_rL_{E_r})\in H,\\ t_1,\dots,t_r\in\mathbb{R},\quad L_j\in\mathfrak{l}_j:=\sum_{k>j}\mathfrak{n}_{kj},\quad L_j=\sum_{k>j}L_{v_{kj}}\ (v_{kj}\in V_{kj})\end{gathered}\tag{12.1}$$

とし，$hE = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k E_k + \sum_{k<m} X_{mk}$ と書くとき，$s(E_k) = 1$ $(\forall k = 1, \ldots, r)$ と正規化していることに注意すると，

$$\lambda_k = e^{t_k} + \tfrac{1}{2}\sum_{i<k} \| v_{ki} \|^2, \quad X_{mk} = e^{t_k/2} v_{mk} + \sum_{i<k} v_{mi} \bigtriangleup v_{ki}. \quad \cdots\cdots \text{②}$$

しかも，逆に $\lambda_k > 0$ $(k = 1, \ldots)$，$X_{mk} \in V_{mk}$ が与えられたとき，②より $t_k \in \mathbb{R}$，$v_{kj} \in V_{kj}$ が解ける（公式略）．ゆえに多様体として

$$\Omega \approx H \approx \Bigl(\mathbb{R}^r \times \prod_{j<k} V_{kj}\Bigr).$$

一方，dh を H 上の左不変 Haar 測度とする：

$$\int_H f(h_0 h)\, dh = \int_H f(h)\, dh \qquad (\forall h_0 \in H, \forall f \in L^1(H, dh)).$$

このようは測度（σ 代数は Borel 集合全体：開集合から生成される σ 代数）が局所 compact 位相群上には，正の定数倍を除いて唯一つ存在する．このとき，

$$I(f) := \int_H f(hE)\, dh \qquad (f \in L^1(\Omega))$$

とおくと，$f \mapsto I(f)$ は H 不変測度（不変積分）を定める：$f_h(x) := f(hx)$ $(h \in H)$ とすると，$I(f_h) = I(f)$ $(\forall f \in L^1(\Omega)$．ゆえに H 不変測度の正の定数倍を除いての一意性から，

$$\int_H f(hE)\, dh = \int_\Omega f(x) \Delta_{-\boldsymbol{d}}(x)\, dx.$$

としてよい．ゆえに

$$\mathit{\Gamma}_\Omega(\boldsymbol{s}) = \int_H e^{-\langle hE \,|\, E \rangle} \chi_{\boldsymbol{s}}(h)\, dh.$$

dh を H の座標系 (12.1)で書き下そう．$hh' = h''$ のとき，先週の積公式より

(12.2) $$t''_k = t_k + t'_k \quad (k = 1, \ldots, r),$$

(12.3) $$v''_{mk} = e^{t_m/2} v'_{mk} + \sum_{k<l<m} v_{ml} \bigtriangleup v'_{lk} + e^{t'_k/2} v_{mk} \quad (1 \leqq k < m \leqq r).$$

$hh' = h''$ により，dh' が dh'' に変換されるとする．そうすると上の積公式から

$$dt''_k = dt'_k, \quad dv''_{mk} = e^{t_m/2} dv'_{mk} + \bigl(\, dv'_{lk}\ (k < l < m) \text{ と } dt'_k\ (k < m) \text{ を含む和}\bigr)$$

辞書的順序では第 2 の式の右辺（　）内の項の添字 (l, k) と (k, k) はどちらも (m, k) より前．ゆえに変換 $h' \mapsto h''$ では Jacobi 行列は上三角行列であり，

$$\prod_{k=1}^{r} dt''_k \cdot \prod_{k<m} dv''_{mk} = \prod_{k=1}^{r} dt'_k \cdot \prod_{k<m} d\bigl(e^{t_m/2} v'_{mk}\bigr) = \prod_{k=1}^{r} dt'_k \cdot \prod_{k<m} e^{(t_m \dim V_{km})/2}\, dv'_{mk}$$

ここで，$p_m := \sum_{k<m} \dim V_{mk}$ とおき，$\boldsymbol{p} := (p_1, \ldots, p_r)$ とおくと，

$$\prod_{k=1}^{r} dt''_k \cdot \prod_{k<m} dv''_{mk} = \chi_{\boldsymbol{p}/2}(h) \cdot \prod_{k=1}^{r} dt'_k \cdot \prod_{k<m} dv'_{mk}.$$

ゆえに，$d\mu(h) := \chi_{-\boldsymbol{p}/2}(h) \prod_{k=1}^{r} dt_k \cdot \prod_{k<m} dv_{mk}$ が H の座標系 (12.1)による左 Haar 測度の表示である．よって

$$\Gamma_\Omega(\boldsymbol{s}) = \prod_{k=1}^{r} \prod_{k<m} \int_{\mathbb{R}} \int_{V_{mk}} e^{-\langle hE \,|\, E \rangle} \chi_{\mathbf{s}-\frac{1}{2}\boldsymbol{p}}(h)\, dt_k\, dv_{mk}.$$

(12.1)のとき，$\langle E_i \,|\, E_j \rangle = s(E_i \triangle E_j) = \delta_{ij} s(E_j) = \delta_{ij}$ より

$$\langle hE \,|\, E \rangle = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = \sum_{k=1}^{r} \Big(e^{t_k} + \frac{1}{2} \sum_{i<k} \| v_{ki} \|^2 \Big) = \sum_{k=1}^{r} e^{t_k} + \tfrac{1}{2} \sum_{k<m} \| v_{mk} \|^2.$$

よって

$$\Gamma_\Omega(\boldsymbol{s}) = \Bigg(\prod_{k=1}^{r} \int_{\mathbb{R}} \big(\exp -e^{t_k}\big) \exp\big(s_k - \tfrac{1}{2}p_k\big) t_k \, dt_k \Bigg) \Bigg(\prod_{k<m} \int_{V_{mk}} \exp\big(-\tfrac{1}{2} \| v_{mk} \|^2\big)\, dv_{mk} \Bigg).$$

右辺の最初の項では，$e^{t_k} = u$ とおくと，$dt_k = u^{-1}\, du$ より

$$\int_{\mathbb{R}} \big(\exp -e^{t_k}\big) \exp\big(s_k - \tfrac{1}{2}p_k\big) t_k \, dt_k = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{s_k - \frac{1}{2}p_k - 1}\, du = \Gamma\big(s_k - \tfrac{1}{2}p_k\big).$$

第 2 項については，$\int_R e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt = \sqrt{2\pi}$ であるから，

$$\int_{V_{ki}} \exp\big(-\tfrac{1}{2} \| v_{ki} \|^2\big)\, dv_{ki} = (2\pi)^{\frac{1}{2}\dim V_{ki}}.$$

以上により，積分は $s_k > \frac{1}{2}p_k$ $(\forall k = 1, \ldots, r)$ のときに絶対収束して

$$\Gamma_\Omega(\boldsymbol{s}) = (2\pi)^{(p_1 + \cdots + p_r)/2} \prod_{k=1}^{r} \Gamma\Big(s_k - \frac{1}{2}p_k\Big).$$

定理 12.2. $|\boldsymbol{p}| := p_1 + \cdots + p_r$ とするとき，

$$\Gamma_\Omega(\boldsymbol{s}) = (2\pi)^{|\boldsymbol{p}|/2} \prod_{k=1}^{r} \Gamma\Big(s_k - \frac{1}{2}p_k\Big).$$

例 12.3. Ω が対称錐のとき，$k > i$ に対して，$\dim V_{ki} = d$（一定）ゆえ，

$$p_k = \sum_{i<k} V_{ki} = (k-1)d.$$

したがって，$|\boldsymbol{p}| = \frac{r(r-1)}{2} d = \dim V - r$．ゆえに $n := \dim V$ とおくと

$$\Gamma_\Omega(\boldsymbol{s}) = (2\pi)^{(n-r)/2} \prod_{k=1}^{r} \Gamma\Big(s_k - \frac{1}{2}(k-1)d\Big).$$

これは，Faraut–Korány の本にある公式である．