§1. 等質開凸錐の基本的事柄

V：有限次元実ベクトル空間，正定値内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を持つ．$\|x\| := \sqrt{\langle x|x\rangle}$ とおく．

定義 1.1. (1) $S \subset V$ が**凸集合**[1](**convex set**)
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $x, y \in S$ であるとき，x と y を結ぶ線分も S に属する．
(2) $S \subset V$ が**錐** (**cone**) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $x \in S$ かつ $\lambda > 0$ ならば，$\lambda x \in S$．
(3) 凸集合である錐を**凸錐**という．

- S：凸錐 $\iff$ $x, y \in S$ のとき，$\forall\lambda > 0$ と $\forall\mu > 0$ に対して，$\lambda x + \mu y \in S$．
- **開凸錐** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 開集合である凸錐．

定義 1.2. Ω：開凸錐．Ω が**正則** (**regular**) $\overset{\text{def}}{\iff}$ Ω は直線を含まない．

補題 1.3. 開凸錐 Ω が正則 $\iff$ $\overline{\Omega}$ は 1 次元部分空間を含まない．

証明. [$\Longleftarrow$] 対偶を示す．$a \in \Omega$，$0 \neq x_0 \in V$ に対して $a + tx_0 \in \Omega$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ とする．$t > 0$ のとき $x_0 + \frac{1}{t}a \in \Omega$ であり，$t < 0$ のとき $-x_0 - \frac{1}{t} \in \Omega$．それぞれにおいて $t \to +\infty$，$t \to -\infty$ として，$\pm x_0 \in \overline{\Omega}$．ゆえに $\overline{\Omega}$ は 1 次元部分空間を含む．
[$\Longrightarrow$] まず次の事実に注意する： $\Omega + \overline{\Omega} \subset \Omega$．
実際，$x \in \Omega$，$y \in \overline{\Omega}$ とする．$\delta > 0$ を選んで，$\|u\| < \delta$ ならば $x + u \in \Omega$ としておく．そして $\|y - y_0\| < \delta$ となる $y_0 \in \Omega$ がとれるから，

$$x + y = (x + (y - y_0)) + y_0 \in \Omega + \Omega \subset \Omega. \ //$$

さて $x_0 \neq 0$ に対して，$\overline{\Omega} \supset \mathbb{R}x_0$ と仮定し，$a \in \Omega$ をとる．このとき，$\forall t \in \mathbb{R}$ に対して，$a + tx_0 \in \Omega + \overline{\Omega} \subset \Omega$ となっている． □

定理 1.4. Ω：正則開凸錐，$\Omega^* := \{\, y\, ;\ \langle y|x\rangle > 0\ \ (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\,\}$．
(1)$\Omega^* \neq \varnothing$ であり，Ω^* も正則開凸錐．
Ω^* を内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ に関する Ω の**双対錐**という．
(2) $(\Omega^*)^* = \Omega$（正則開凸錐の**双対性**）．

[1]凸という漢字の書き順は 2 通りあるらしい．左上の縦棒から始めるとするのと，左上の横棒から始めるとするというもの．どちらにしても 5 画である．部首分類としては凵繞（かんにょう），凵部（かんぶ），凵（うけばこ），凵構えに属する．凹（これも 5 画），函，出，凶などが同類．

§2. 対称錐と Jordan 代数

以下 V は内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を持つ有限次元実ベクトル空間．
Ω は V の対称錐であるとし，内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ に関して Ω は自己双対であると仮定する．
すなわち

$$\Omega=\Omega^*=\left\{y\in V\ ;\ \langle\, y\,|\,x\,\rangle>0\quad\text{for all }x\in\overline{\Omega}\setminus\{0\}\right\}\quad\cdots\cdots\ ①$$

が成り立っているとする．
このとき，$GL(\Omega)=GL(\Omega^*)={}^tGL(\Omega)$ ゆえ，Lie 群 $GL(\Omega)$ は reductive．
$G:=GL(\Omega)^\circ$：$GL(\Omega)$ の単位元の連結成分（$GL(\Omega)$ の開かつ閉な正規部分群）

問題 2.1. G 自身が Ω に推移的に作用していることを示せ．
（Ω が連結であることが効いている．）

$\theta(g):={}^tg^{-1}$ とおくと，$\theta\in\mathrm{Aut}(GL(\Omega))$．

$$K:=\{g\in G\ ;\ \theta(g)=g\}=G\cap O(V).$$

$\mathfrak{g}:=\mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{k}:=\mathrm{Lie}(K)$，$\theta X:=-{}^tX\ (X\in\mathfrak{g})$ とおく[1]．

$$\mathfrak{p}:=\{X\in\mathfrak{g}\ ;\ \theta X=-X\}$$

とおくと，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$（$\mathfrak{g}$ の Cartan 分解）．

定理 2.1. $\exists e\in\Omega$ s.t. $K=G_e$：G における e の固定部分群．
K は G の極大 compact 部分群で，連結である．

【証明の概略】 $L\supset K$：G の compact 部分群．$x_0\in\Omega$ を一つとる．
dl：L の Haar 測度，$\int_L dl=1$ とする．元 c を次で定義する．

$$e:=\int_L lx_0\,dl.$$

$\forall x\in\overline{\Omega}\setminus\{0\}$ に対して，$\langle\, e\,|\,x\,\rangle=\int_L\langle\, lx_0\,|\,x\,\rangle\,dl>0$．再び①より $e\in\Omega$．
さらに任意の $l'\in L$ に対して，e の定義より

$$l'e=\int_L l'lx_0\,dl=\int_L lx_0\,dl=c$$

となるから，$L\subset G_e$ である．ここで，$G/G_e\approx\Omega$ (diffeo) であり，Ω は単連結である（Ω が凸集合であることより）から，G_e は連結[2]である．

[1] $d\theta_c$ とは書かないで θ と書く．
[2] ホモトピー完全系列 $\ldots\to\pi_1(H)\to\pi_1(G)\to\pi_1(G/H)\to\pi_0(H)\to\pi_0(G)\to\pi_0(G/H)\to 1$ による（H は閉部分群）．例えば，横田一郎：群と位相，命題 173.

$\mathfrak{g}_e := \mathrm{Lie}(G_e)$ とするとき，$\mathfrak{g}_e \subset \mathfrak{k}$ がわかると $G_e \subset K^\circ \subset K$ がわかって[3]，先の $(K\subset)\, L \subset G_e$ と合わせると，$G_e = K = K^\circ = L$. $\square$

補題 2.2. $\mathfrak{g}_e \subset \mathfrak{k}$.

証明. G 不変な Riemann 計量 $\sigma_x(u,v) := D_u D_v \log \phi(x)$ があるので．$G_e \subset O(V, \sigma_e)$ となって，G_e はコンパクトであることに注意．$\forall X \in \mathfrak{g}_e$ を $X = U + Z$ $(U \in \mathfrak{k},\ Z \in \mathfrak{p})$ と書く．$\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}_e$ より，$Z = X - U \in \mathfrak{g}_e$．自己共役作用素の 1 係数部分群 $\exp tZ$ $(t \in \mathbb{R})$ のノルムは t に無関係な定数で押さえられる．固有値を考えて $Z = 0$，すなわち $X = U \in \mathfrak{k}$ を得る． $\square$

以下，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$，$\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_e = \{X \in \mathfrak{g}\ ;\ Xe = 0\}$ とする．
このとき，$\mathfrak{k}$ は線型写像 $\mathfrak{g} \ni X \mapsto Xe \in V$ の核．ゆえに $\mathfrak{p} \ni X \mapsto Xe \in V$ は線型同型である．この逆写像を $M : V \ni x \mapsto M(x) \in \mathfrak{p}$ とすると，$M(x)e = x$.

定義 2.3. $xy := M(x)y$ によって，V に双線型な積を定義する．ここでは，結合法則の成立は要求しない[4].

定理 2.4. 定義 2.3 の積 $xy = M(x)y$ と内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ によって，V は Euclid 型の Jordan 代数になっていて，e は単位元であり，$\overline{\Omega} = \{x^2\ ;\ x \in V\}$．よって[5],

$$\Omega = \mathrm{Int}\{x^2\ ;\ x \in V\}.$$

定義 2.5. A：双線型な積 $(x,y) \mapsto xy$ を持つ実または複素ベクトル空間.
A が **Jordan 代数**であるとは，任意の $x, y \in V$ に対して，次の (1), (2) がみたされることである：

(1) $xy = yx$, (2) $x(x^2 y) = x^2(xy)$.

注意 2.6. (1) のもとで (2) は $x(yx^2) = (xy)x^2$ と書かれるから，(2) は特別な 3 元 x, y, x^2 に対しては積が結合的であることを意味している．また (2) は乗法作用素 $M(x)$ と $M(x^2)$ が可換であると言っている．

---

[3] K° は K の単位元の連結成分.
[4] つまり，双線型写像 $V \times V \to V$ が与えられただけで，V に積が定義されたと言うのである．
[5] 一般の開集合 A に対しては，$\mathrm{Int}\overline{A} \supsetneq A$ であるが，開凸錐 Ω に対しては $\Omega = \mathrm{Int}\,\overline{\Omega}$ である．

定義 2.7. A：単位元を持つ Jordan 代数.
A が **Euclid 型** $\overset{\text{def}}{\iff}$ A に**結合的内積**$\langle\cdot|\cdot\rangle$ が存在する，すなわち

$$\langle\, xy \,|\, z \,\rangle = \langle\, x \,|\, yz \,\rangle \quad (\forall x, y, z \in A). \tag{2.1}$$

注意 2.8. 元 y をかける作用素を $M(y)$ で表す．つまり $M(y)x = yx$ とすると，

$$(2.1) \iff \langle\, M(y)x \,|\, z \,\rangle = \langle\, x \,|\, M(y)z \,\rangle$$

ゆえに，結合的内積とはかけ算作用素がつねに自己共役となる内積のことである.

例 2.9. $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$，$\Omega = \{x \in V\ ;\ x \gg 0\}$.
$GL(n, \mathbb{R})$ は $\rho(g)x := gx{}^tg$ で作用．つまり，準同型 $\rho : GL(n, \mathbb{R}) \to GL(\Omega)$ を考えていることになる．$e \in \Omega$ を単位行列とする．ρ を $GL(n, \mathbb{R})$ の単位元において微分したものも ρ で表すと

$$\rho(Y)x = Yx + x{}^tY \qquad (Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) := \mathrm{Lie}(GL(n, \mathbb{R})) = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})).$$

$\alpha(Y) := \rho(Y)e = Y + {}^tY$ とおくと，$\alpha(X) = 2X$ $(X \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}))$ となる[6]．ゆえに

$$\left(\alpha\big|_{\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})}\right)^{-1}(x) = \frac{1}{2}x.$$

よって，$M(x) = \frac{1}{2}\rho(x)$ となる．すなわち，$M(x)y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ となる．したがって 2 乗に関しては，Jordan 積も通常の行列の積も同じ．ゆえに

$$\{x^2\ ;\ x \in V\} = \{y \in V\ ;\ y \text{ は半正定値}\} = \overline{\Omega}.$$

逆に Jordan 代数から出発して，対称錐を構成する.
以下 V は Euclid 型 Jordan 代数.
V の乗法作用素を $M(x)$，結合的内積を $\langle\cdot|\cdot\rangle$ で表す.
V の単位元を e で表す．次の事実を踏まえる[7].

(1) Jordan 代数は**べき結合的** (**power-associative**) である．すなわち，帰納的に $x^n := xx^{n-1}$ で x^n $(n = 2, 3, \ldots)$ を定義するとき，指数法則 $x^{m+n} = x^m x^n$ が成立する．ゆえに，$e, x, x^2, \ldots$ で生成される部分代数を $\mathbb{R}[x]$ で表すと，$\mathbb{R}[x]$ は結合的代数 (associative algebra) で，もちろん可換である.

(2) $n = 1, 2, \ldots$ について，$M(x^n) \in \langle M(x), M(x^2)\rangle$：$M(x)$ と $M(x^2)$ で[8]生成される $\mathcal{L}(V)$ の可換な部分代数（実はこれを (1) の証明に使う）.

[6]先の記号を使うと，$\mathfrak{p} = \rho(\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}))$.
[7]Faraut–Korányi：Analysis on symmetric cones，または佐武一郎：リー環の話（付録 1）を参照.
[8]結合法則がないので，$M(x^2) = M(x)^2$ が出てこない.

定義 2.10. (1) $c \in V$ が**べき等元 (idempotent)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $c^2 = c$.
(2) 2 個のべき等元 c, d が**直交する (orthogonal)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $cd = 0$
（このとき，$\langle c \,|\, d \rangle = \langle c \,|\, cd \rangle = 0$ である）.
(3) 直交べき等元 $c_1, \ldots, c_k$ が**完全系 (CSOI**[9]**)**

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ c_i \neq 0 \ (\forall i),\ \ c_i c_j = \delta_{ij} c_i \ (\forall i, j),\ \ c_1 + \cdots + c_k = e.$$

定理 2.11. $\forall x \in V,\ \exists 1\, c_1, \ldots, c_k$: CSOI, $\exists 1\, \lambda_1 < \cdots < \lambda_k$: 実数 s.t.

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j c_j \qquad (x \text{ の}\textbf{スペクトル分解}).$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ を x の**固有値**という.

• 定理のようなスペクトル分解があったら，$n = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$x^n = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^n c_j. \quad \cdots\cdots \ ①$$

これと Vandermonde の行列式を使うと，①で $n = 0, 1, \ldots, k-1$ とした連立方程式から $c_1, \ldots, c_k$ が解けて，各 c_j は x の多項式で書けることがわかる．すなわち，$c_j \in \mathbb{R}[x]$.

命題 2.12. べき等元 c に対して，$M(c)$ の固有値は高々 $0, \frac{1}{2}, 1$ である.

証明は脚注 7 の Faraut-Korányi，または佐武参照（難しくはない）.
作用素 $M(c)$ の j 固有空間を $V_j(c)$ $(j = 0, \frac{1}{2}, 1)$ で表して得られる V の直交直和分解 $V = V_0(c) \oplus V_{1/2}(c) \oplus V_1(c)$ を，べき等元 c に関する V の **Peirce 分解**と呼ぶ.

例 2.13. $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ のとき，例 2.9 より，Jordan 積は $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$.
典型的なべき等元は，I_k を k 次の単位行列とするときの $c = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ であり，c に関する V の Peirce 空間 $V_j(c)$ はそれぞれ

$$V_0(c) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right), \qquad V_{1/2}(c) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & 0 \end{array}\right), \qquad V_1(c) = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

定義 2.14. $x \in V$ が**可逆** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists y \in \mathbb{R}[x]$ s.t. $xy = e$.
この y は明らかに一意的で x^{-1} で表す．また可逆元の全体を $V^\times$ で表す.

[9] complete system of orthogoal idempotents.

注意 2.15. $y \in \mathbb{R}[x]$ という要請がなければ，$xy = e$ となる y の一意性は言えない．実際，$\mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$ において $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であるとき，$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx) = I$ となる $y \in \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$ は，$y = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & -1 \end{pmatrix}$ （$b \in \mathbb{R}$ は任意）で与えられる．もちろん $y \in \mathbb{R}[x]$ となるのは $b = 0$ のときのみである．

定理 2.16. $\Omega := \mathrm{Int}\{x^2 \,;\, x \in V\}$ とおく．Ω は対称錐で，$V^\times$ の e を含む連結成分 $(V^\times)^\circ$ に一致する．さらに

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in V \,;\, M(x) \text{ は正定値}\} \\ &= \{x \in V \,;\, x \text{ の固有値はすべて正}\} \\ &= \{\exp x \,;\, x \in V\}. \end{aligned}$$

ここで，$\exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}[x]$ であり，$\exp x = (\exp M(x))e$ でもある．

定義 2.17. $P(x) := 2M(x)^2 - M(x^2)$ $(x \in V)$.
quadratic operators (quadratic representation).

• 明らかに $P(x) \in \langle M(x), M(x^2) \rangle$ である．$M(x^n) \in \langle M(x), M(x^2) \rangle$ $(n = 1, 2, \dots)$ より，$P(x)$ と $M(x^n)$ は可換である．

例 2.18. $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ のとき．Jordan 積は $x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx) = M(x)y$．この場合は

$$2M(x)^2 y = \tfrac{1}{2}(x^2 y + 2xyx + yx^2), \qquad M(x^2)y = \tfrac{1}{2}(x^2 y + yx^2)$$

より，$P(x)y = xyx$ である．

• 一般には $P(xy) \neq P(x)P(y)$ であることも，例**??**から理解できよう．

命題 2.19. (1) $x \in V^\times \iff P(x)$：可逆．このとき $P(x) \in GL(\Omega)$ であり，さらに次が成り立つ．$P(x)^{-1} = P(x^{-1})$，$P(x)x^{-1} = x$，$P(x)^{-1}x = x^{-1}$．

(2) 任意の $x, y \in V$ に対して，

$$P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x) \quad (\textbf{fundamental formula}),$$
$$P(x^n) = P(x)^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(3) $\forall x \in V$ に対して，$P(\exp x) = \exp 2M(x)$．
とくに，$x \in \Omega \implies P(x) \in G := GL(\Omega)^\circ$．

$K := G \cap O(V)$ とおくと，$K = G_e$ であることを思い出しておく．

命題 2.20. $K = \mathrm{Aut}(V)^\circ$ であり，各 $g \in G$ は一意的に次で表される．

$$g = P(x)k \qquad (x \in \Omega,\, k \in K).$$

定理 2.21. (1) $\sigma_x(u,v) := \langle\, P(x)^{-1}u \,|\, v \,\rangle$ $(x \in \Omega,\, u, v \in V)$ は Ω に G 不変な Riemann 構造を定義する．

(2) $s_e : x \mapsto x^{-1}$ は e を固定点とする involutive ($s_e^2 = \mathrm{Id}$) な Ω の isometry.

(3) $\theta(g)x = (gx^{-1})^{-1}$ $(g \in G,\, x \in \Omega)$．(Recall $\theta(g) = {}^t g^{-1}$.)

証明． (1) 明らかに各 $x \in \Omega$ について，σ_x は V 上の正定値な対称双線型形式である．G 不変性を示すために，$g \in G$ を $g = P(y)k$ $(y \in \Omega,\, k \in K = \mathrm{Aut}(V)^\circ)$ と表すと，命題2.19 の (2) と $kM(x)k^{-1} = M(kx)$ より

$$P(gx) = P(P(y)kx) = P(y)P(kx)P(y) = P(y)kP(x)k^{-1}P(y).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\sigma_{gx}(gu, gv) &= \langle\, P(gx)^{-1}P(y)ku \,|\, P(y)kv \,\rangle \\ &= \langle\, P(y)^{-1}kP(x)^{-1}k^{-1}P(y)^{-1}P(y)ku \,|\, P(y)kv \,\rangle \\ &= \sigma_x(u,v).\end{aligned}$$

(2) $s_e^2 = \mathrm{Id}$ は明らか．また $x \in \Omega$ が $s_e(x) = x$ をみたせば，$x^2 = e$ であり，固有値を考えれば，$x = e$ を得る．$\sigma_{s_e(x)}(s_e'(x)u, s_e'(x)v) = \sigma_x(u,v)$ を示すために，次の補題が必要である．

補題 2.22. $D_u(x^{-1}) = -P(x)^{-1}u$ $(u \in V)$．言い換えると，$s_e'(x) = -P(x)^{-1}$.

定理の証明を続けよう．今の補題と命題2.19 の (1) より，

$$\begin{aligned}\sigma_{x^{-1}}(s_e'(x)u, s_e'(x)v) &= \langle\, P(x^{-1})^{-1}P(x)^{-1}u \,|\, P(x)^{-1}v \,\rangle \\ &= \langle\, P(x)^{-1}u \,|\, v \,\rangle = \sigma_x(u,v).\end{aligned}$$

(3) $g = P(y)k$ $(y \in \Omega,\, k \in K)$ とおくと，命題2.19 より

$$\begin{aligned}(gx)^{-1} = (P(y)kx)^{-1} &= P(P(y)kx)^{-1}P(y)kx \\ &= P(y)^{-1}P(kx)^{-1}P(y)^{-1}P(y)kx.\end{aligned}$$

すでに使ったように，$P(kx) = kP(x)k^{-1}$ であるから

$$(gx)^{-1} = P(y)^{-1}kP(x)^{-1}x = \theta(P(y)k)x^{-1} = \theta(g)x^{-1}.$$

以上で証明が完成する． □

定義 2.23. 一般に Riemann 多様体 X において，次の条件がみたされとき，X は **Riemann 対称空間**であるという： 各 $y \in X$ に対して，involutive な isometry s_y が存在して，y は s_y の孤立固定点になっている．

Ω に戻ろう．スペクトル分解を考えれば，$y \in \Omega$ に対して一意的に $x \in \Omega$ が存在して，$x^2 = e$ となることがわかることに注意．この x を $y^{1/2}$ と表せば，$P(y^{1/2})e = x^2 = y$．そこで，$s_y := P(y^{1/2}) \circ s_e \circ P(y^{1/2})^{-1}$ とおけば，s_y は y を固定点とする involutive な isometry であることがわかる．ゆえに Ω は Riemann 対称空間である．

• $GL(V)$：V の可逆な線型作用素の全体．自然に $GL(V)$ は Lie 群．

以下，Ω は正則開凸錐．

定義 1.5. $GL(\Omega) := \{g \in GL(V)\ ;\ g(\Omega) = \Omega\ \}$：$\Omega$ の**線型自己同型群**.

$GL(\Omega)$ は $GL(V)$ の閉部分群として Lie 群である．

定義 1.6. Ω が**等質** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $GL(\Omega)$ が Ω に推移的に働く．すなわち

$$\forall x, y \in \Omega,\ \ \exists g \in GL(\Omega)\ \ \text{s.t.}\ \ gx = y.$$

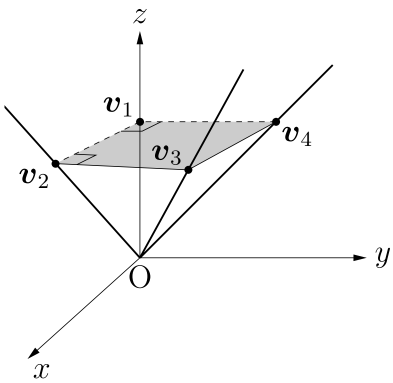
例 1.7. 以下 $\mathbb{R}^3$ で考える．次の 4 個のベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をとって，開凸錐

$$\Omega := \left\{ t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 + t_3\boldsymbol{v}_3 + t_4\boldsymbol{v}_4\ ;\ t_j > 0\ (j = 1, 2, 3, 4) \right\}$$

を考えよう．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4$ の凸包は 1 辺の長さが 1 の正方形である．



$\mathbb{R}\boldsymbol{v}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_2$：平面 $y = 0$（xz 平面）

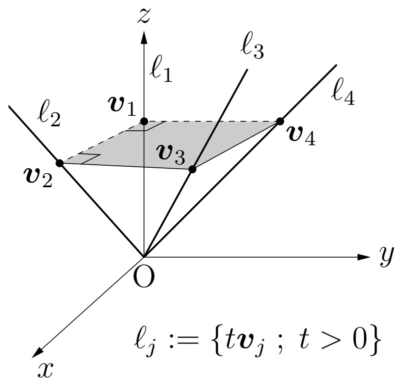
$\mathbb{R}\boldsymbol{v}_2 + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_3$：平面 $x = z$

$\mathbb{R}\boldsymbol{v}_3 + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_4$：平面 $y = z$

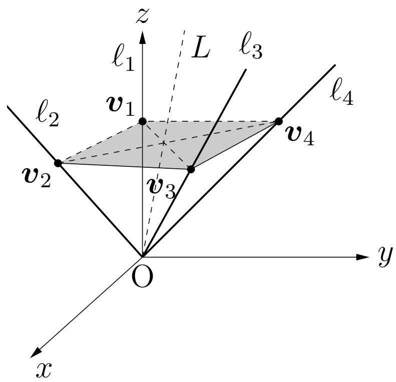
$\mathbb{R}\boldsymbol{v}_4 + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_1$：平面 $x = 0$（yz 平面）

ゆえに[2]，$\Omega = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{ll} x > 0, & y > 0 \\ z - x > 0, & z - y > 0 \end{array} \right\}$.

問題 1.1. この Ω は等質ではない．$\because$ $\forall g \in GL(\Omega)$ は右下図の L を L に写す．



$\ell_j := \{t\boldsymbol{v}_j\ ;\ t > 0\}$



[2]たとえば，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_3$ の中点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ が入っている側ということで．

例 1.8.　正定値実対称行列のなす開凸錐

$V := \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$：$n$ 次実対称行列のなす実ベクトル空間.
$\Omega := \{x \in V\ ;\ x \gg 0\}$： 正定値実対称行列のなす開凸錐.
ここで $x \in V$ について,

$$x \in \Omega \iff x \text{の固有値はすべて正} \iff {}^t\xi x \xi > 0\ (\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

V に内積 $\langle x \,|\, y \rangle := \mathrm{Tr}(xy)$ を入れる．実際 $\langle x \,|\, x \rangle = \sum_{i,j} x_{ij}x_{ji} = \sum_{i,j} x_{ij}^2$（行列 x のすべての成分の平方の和）となるから，確かに正定値内積である.

問題 1.2.　Ω^* をこの内積に関する Ω の双対錐とすると，$\Omega^* = \Omega$.

定義 1.9.　(1) 一般に正則開凸錐 $\Omega \subset V$ が，V の内積をうまくとれば $\Omega^* = \Omega$ となるとき，Ω は**自己双対**であるという.
(2) 内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を特定したとき，Ω は内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ に関して自己双対であるという.

各 $T \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ に対して，V 上の線型作用素 $\rho(T) = \rho_3(T)$ を $\rho(T)x = Tx{}^tT$ $(x \in V)$ で定義する．$g \in GL(n,\mathbb{R})$ なら明らかに $\rho(g) \in GL(\Omega)$.
I_n を n 次単位行列とすると，$I_n \in \Omega$.

定理 1.10.　Ω は等質である.

証明.　$\forall x \in \Omega$ は正定値な平方根 $x^{1/2}$ を持つ．$x^{1/2} \in GL(n,\mathbb{R})$ ゆえ $\rho(x^{1/2}) \in GL(\Omega)$ を考えると，$x^{1/2}$ は対称行列ゆえ，$\rho(x^{1/2})I_n = x^{1/2}I_nx^{1/2} = x$ となる.　□

定義 1.11.　一般に，等質で自己双対である開凸錐のことを**対称錐**と呼ぶ.

例 1.12.　Vinberg 錐

自己双対でない等質開凸錐，すなわち，どのように内積を定義してもその内積に関して自己双対にならない等質開凸錐の例（1960 年に Vinberg が挙げた開凸錐で，最低次元の 5 次元のもの[3]）.

$$V := \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_4 \\ v_2 & v_3 & 0 \\ v_4 & 0 & v_5 \end{pmatrix}\ ;\ v_i \in \mathbb{R}\ (i = 1,\ldots,5) \right\} \subset \mathrm{Sym}(3,\mathbb{R}).$$

[3] 後年，Vinberg の理論により，11 次元以上では，互いに線型同値ではない非自己双対な等質開凸錐は連続濃度あることが示されている.

V には $\mathrm{Sym}(3,\mathbb{R})$ からの内積を入れる．

$$\langle\, v \,|\, v' \,\rangle := \mathrm{Tr}(vv') \qquad (v, v' \in V).$$

考える開凸錐は

$$\Omega := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \;;\; x_1 > 0,\ x_1x_3 - x_2^2 > 0,\ x_1x_5 - x_4^2 > 0 \right\}.$$

この Ω を **Vinberg 錐**と呼ぶ．

$x \in V$ に対して，$x^{(1)} := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$，$x^{(2)} := \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_4 & x_5 \end{pmatrix}$ とおき，$i = 1, 2$ に対して，

$g_i := \begin{pmatrix} a & 0 \\ b_i & c_i \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$，$a > 0$，$c_i > 0$ $(i = 1, 2)$ とするとき，

$g \in GL(V)$ を，$(gx)^{(i)} := g_i x^{(i)}\, {}^t g_i$ $(i = 1, 2)$ で定義し，以下 $g = (g_1, g_2)$ と表す．

直接の計算で

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_4 & x_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

の $(1, 1)$ 成分はともに a^2x_1 であることがわかるから，g は well-defined で，

$$x \in \Omega \iff x^{(1)} \gg 0,\, x^{(2)} \gg 0 \iff (gx)^{(1)} \gg 0,\, (gx)^{(2)} \gg 0$$

であるから，$g \in GL(\Omega)$ である

定理 1.13. Ω は等質である．

定理 1.14. 上で定義した内積で考えて，$\Omega^* = \{y \in V \;;\; y \gg 0\}$.

補題 1.15. 一般に，$G(\Omega^*) = {}^tG(\Omega)$ であり，Ω が等質なら Ω^* も等質（後述）．

【定理 1.14 の証明の方針】 (1) $E := I_3$ とすると，$E \in \Omega^*$ である．実際，任意の $x \in \overline{\Omega} \setminus 0$ に対して

$$\langle\, E \,|\, x \,\rangle = \mathrm{Tr}\, x = x_1 + x_3 + x_5 \geqq 0.$$

$x_1x_3 - x_2^2 \geqq 0$，$x_1x_5 - x_4^2 \geqq 0$ より，$x_1 = x_3 = x_5 = 0$ から $x_2 = x_4 = 0$ が出る．

(2) $\mathrm{Sym}(n, R)$ 上の線型作用素 $\rho_n(T)$ $(T \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}))$ のトレース内積 $\langle\, X \,|\, Y \,\rangle := \mathrm{Tr}(XY)$ に関する共役作用素 ${}^t\rho_n(T)$ は $\rho_n({}^tT)$ に等しい．

(3) $\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b_1 & c_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b_2 & c_2 \end{smallmatrix}\right)\right)$ の共役作用素は $\rho_3\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b_1 & b_2 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ に等しいので，$\rho_3\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b_1 & b_2 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)E$ を計算してみると，$y \in V$，$y \gg 0$ の任意の元を表し得ることがわかる．

定義 1.16. $x \in \Omega$ に対して

$$\phi(x) := \int_{\Omega^*} e^{-\langle x \,|\, y \rangle}\, dy.$$

Ω 上の函数 ϕ を Ω の**特性函数**と呼ぶ（とりあえず $+\infty$ も許しての定義である）.

(1) x が Ω のコンパクト集合にとどまるとき，積分は一様収束.

(2) $\phi(gx) = |\,\mathrm{Det}\, g\,|^{-1} \phi(x)$ $(x \in \Omega,\, g \in GL(\Omega))$.

以下，D_u $(u \in V)$ は u 方向の微分を表す：

$$D_u f(x) := \frac{d}{dt} f(x+tu)\Big|_{t=0} \qquad (f \in C^\infty(\Omega)).$$

命題 1.17. 各 $x \in \Omega$ に対して，$\sigma_x(u,v) := D_u D_v \log \phi(x)$ $(u, v \in V)$ により，Ω に $GL(\Omega)$ 不変な Riemann 計量が入る：

$$\sigma_{gx}(gu, gv) = \sigma_x(u,v) \qquad (g \in GL(\Omega)).$$

$f \in C^\infty(\Omega)$ とする．各 $x \in \Omega$ において，$V \ni u \mapsto D_u f(x)$ は線型形式であるから，$\exists 1 \nabla f(x) \in V$ s.t.

$$D_u f(x) = \langle\, \nabla f(x) \,|\, u \,\rangle \qquad (\forall u \in V).$$

定義 1.18. $x \in \Omega$ に対して，$x^* := -\nabla \log \phi(x) \in V$ とおく.

$\nabla \log \phi(x)$ の定義より，$u \in V$ に対して

$$\langle\, x^* \,|\, u \,\rangle = -D_u \log \phi(x) = \frac{1}{\phi(x)} \int_{\Omega^*} \langle\, y \,|\, u \,\rangle\, e^{-\langle x \,|\, y \rangle}\, dy. \qquad (*)$$

ゆえに，$x^* = \dfrac{1}{\phi(x)} \displaystyle\int_{\Omega^*} y\, e^{-\langle x \,|\, y \rangle}\, dy = \dfrac{\displaystyle\int_{\Omega^*} y\, e^{-\langle x \,|\, y \rangle}\, dy}{\displaystyle\int_{\Omega^*} e^{-\langle x \,|\, y \rangle}\, dy}$ である.

これの右端の式により，x^* は密度関数 $e^{-\langle x \,|\, y \rangle}$ に関する Ω^* の重心であることを示している．Ω^* は凸であるから，$x^* \in \Omega^*$ であることがわかる.

定理 1.19. (1) $x \mapsto x^*$ は Ω から Ω^* への全単射（Vinberg の $*$ **写像**という）.
(2) $(gx)^* = {}^t g^{-1} x^*$ $(g \in GL(\Omega),\, x \in \Omega)$.

命題 1.20. Ω が等質ならば Ω^* も等質.

証明. $y, y' \in \Omega^*$ とし，$x^* = y$，$(x')^* = y'$ となる $x, x' \in \Omega$ をとる．$gx = x'$ となる $g \in GL(\Omega)$ をとると，

$$ {}^t g^{-1} y = {}^t g^{-1} x^* = (gx)^* = (x')^* = y'^*. $$

$GL(\Omega^*) = {}^t GL(\Omega)$ ゆえ，証明終わり． □

§3. 等質開凸錐とクラン

V：有限次元実ベクトル空間，内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を持つ．$\|x\| := \sqrt{\langle x|x\rangle}$.
Ω：V の正則開凸錐．Ω は等質であるとする．すなわち，$GL(\Omega) \curvearrowright \Omega$：推移的.

Vinberg (1963) により
$\exists H$：$GL(\Omega)$ の連結同時三角化可能な部分群 s.t. $H \curvearrowright \Omega$：単純推移的.
H を **Borel 部分群**，**岩澤部分群**などという．それらは $GL(\Omega)$ の連結同時三角化可能な部分群の中で極大で $GL(\Omega)$ の中で互いに共役である.

- **同時三角化可能** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists V$ の基底 s.t. H の元はすべて下三角行列[1]で表される.
- **単純推移的**
  $\overset{\text{def}}{\iff}$ 推移的，かつ固定部分群 $H_a = \{h \in H\,;\, ha = a\}$ $(a \in \Omega)$ が trivial.
- **線型 Lie 群**：$GL(V)$ の閉部分群になっている群.

G：線型 Lie 群．G の **Lie 代数**とは，次の集合 $\mathfrak{g}$ のこと：$\mathcal{L}(V)$ を V 上の線型写像（線型作用素）全体がなすベクトル空間とするとき,

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathcal{L}(V)\,;\, \exp tX \in G \ \ (\forall t \in \mathbb{R})\}.$$

この $\mathfrak{g}$ のことを $\mathrm{Lie}(G)$ とも書く.

- $\mathcal{L}(V)$ は $GL(V)$ の Lie 代数になっている．したがって，Lie 代数と見るときは，$\mathcal{L}(V)$ を $\mathfrak{gl}(V)$ と書く.

以下，$X, Y \in \mathcal{L}(V)$ に対して，$[X,Y] := XY - YX$ とおく．次の補題の証明は容易.

補題 3.1. (1) $[X,Y]$ は双線型写像（X に関しても Y に関しても線型）.
(2) $[Y,X] = -[X,Y]$.
(3) (**Jacobi の恒等式**) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [Z,X],Y] = 0$.

あまり明らかでないが，次が成り立つ.

命題 3.2. $G \subset GL(V)$；線型 Lie 群，$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$.
(1) $\mathfrak{g}$ は $\mathcal{L}(V)$ の部分ベクトル空間である.
(2) $X, Y \in \mathfrak{g}$ ならば，$[X,Y] \in \mathfrak{g}$ である.

以下，H：$GL(\Omega)$ の岩澤部分群，$\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H) \subset \mathcal{L}(V)$ とする.
$E \in \Omega$ を固定して，軌道写像 $H \ni h \mapsto hE \in \Omega$ を考えると，これは微分同相.

[1] 上三角でもよい.

H の単位元における微分 $\mathfrak{h} \ni T \mapsto TE \in V$ は線型同型写像.
その逆写像を $L : V \ni x \mapsto L(x) \in \mathfrak{h}$ とする.
このとき，各 $x \in V$ に対して，$L(x)$ は $L(x)E = x$ をみたす一意的な $\mathfrak{h}$ の元.

定義 3.3. $x \triangle y := L(x)y \qquad (x, y \in V)$.

明らかに $x \triangle y$ は双線型である．よって V に algebra の構造が定義された.

補題 3.4. $[L(x), L(y)] = L(x \triangle y - y \triangle x) \qquad (x, y \in V)$.

証明. $[L(x), L(y)] \in \mathfrak{h}$ であって，

$$[L(x), L(y)]E = L(x)y - L(y)x = x \triangle y - y \triangle x. \qquad \square$$

一般にベクトル空間 V に双線型な積 $\triangle$ が定義されていて，その積による左乗法作用素 $L(x)$ が補題 3.4 の性質をみたすとき，$(V, \triangle)$ のことを**左対称代数**と呼ぶ.
この用語の妥当性を見るために，**結合子** $[\cdot, \cdot, \cdot]$ を導入しよう：

$$[a, b, c] := a \triangle (b \triangle c) - (a \triangle b) \triangle c.$$

補題 3.5. $[L(x), L(y)] = L(x \triangle y - y \triangle x) \quad (\forall x, y \in V)$

$$\iff [x, y, z] = [y, x, z] \quad (\forall x, y, z \in V).$$

すなわち，3 重線型写像である結合子は，左側の 2 変数について対称である.

証明は省略.

補題 3.6. $\mathrm{Tr}\ L(x \triangle y)$ は V に内積を定める： $\begin{cases} \mathrm{Tr}\, L(x \triangle y) = \mathrm{Tr}\, L(y \triangle x) \\ \mathrm{Tr}\, L(x \triangle x) > 0 \qquad (\text{if } x \neq 0) \end{cases}$

証明. 補題 3.4 で両辺の trace をとることで，$\mathrm{Tr}\, L(x \triangle y) = \mathrm{Tr}\, L(y \triangle x)$ を得る.
正定値性を示すために，Ω の特性函数を ϕ とする： Ω^* を Ω の双対凸錐とすると，

$$\phi(u) := \int_{\Omega^*} e^{-\langle u \,|\, y \rangle}\, dy \qquad (u \in \Omega).$$

$x \in V$, $t \in \mathbb{R}$ のとき

$$\phi((\exp tL(x))E) = (\mathrm{Det} \exp tL(x))^{-1} \phi(E) = e^{-t\ \mathrm{Tr}\, L(x)}\, \phi(E).$$

簡単のため $\Phi(u) = \log \phi(u)$ とおくと

$$\Phi((\exp tL(x))E) = -t\ \mathrm{Tr}\, L(x) + \Phi\,(E). \tag{3.1}$$

ここで函数 $\Phi(u)$ の $u = E$ における Taylor 展開を考える：

$$\begin{aligned}\Phi(E+h) &= \Phi(E) + D_h\Phi(E) + \frac{1}{2}D_h^2\Phi(E) + o(\|h\|^2)\\ &= \Phi(E) + \langle h\,|\,\nabla\rangle\Phi(E) + \frac{1}{2}\langle h\,|\,\nabla\rangle^2\,\Phi(E) + o(\|h\|^2) \quad (h\to 0).\end{aligned}$$

2 行目は $D_h = \sum h_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} =: \langle h\,|\,\nabla\rangle$ であることに注意．さて，

$$(\exp tL(x))E = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}L(x)^jE = E + tx + \frac{1}{2}t^2\,(x\bigtriangleup x) + o(t^2) \qquad (t\to 0)$$

であるから，上の Taylor 展開で $h = (\exp tL(x))E - E$ とおくと

$$\begin{aligned}\Phi((\exp tL(x))E) &= \Phi(E) + t\,\langle x + \tfrac{1}{2}t(x\bigtriangleup x) + o(t)\,|\,\nabla\rangle\Phi(E)\\ &\qquad + \frac{1}{2}t^2\,\langle x + \tfrac{1}{2}t(x\bigtriangleup x) + o(t)\,|\,\nabla\rangle^2\Phi(E) + o(t^2)\\ &= \Phi(E) + t\,\langle x\,|\,\nabla\rangle\Phi(E)\\ &\qquad + \frac{1}{2}t^2\big\{\langle x\bigtriangleup x\,|\,\nabla\rangle + \langle x\,|\,\nabla\rangle^2\big\}\Phi(E) + o(t^2) \qquad (t\to 0).\end{aligned}$$

これより，(3.1)において，t，t^2 の係数を比べることにより

$$-\operatorname{Tr}L(x) = \langle x\,|\,\nabla\rangle\Phi(E) = D_x\log\phi(E), \qquad (D_{x\bigtriangleup x} + D_x^2)\log\phi(E) = 0.$$

ゆえに最初の式で，x のところを $x\bigtriangleup x$ とおいて，2 番目の式を用いると

$$\operatorname{Tr}L(x\bigtriangleup x) = -D_{x\bigtriangleup x}\log\phi(E) = D_x^2\log\phi(E) = \sigma_E(x,x) > 0 \quad (\text{if } x\neq 0). \qquad \square$$

定義 3.7. 一般に $(V,\bigtriangleup)$ を algebra とする（結合法則は仮定しない）．
(V,Δ) が **clan** であるとは，左乗法作用素 $L(x)y := x\bigtriangleup y$ に対して，次の (1)〜(3) がみたされるときをいう．

(1) $(V,\bigtriangleup)$ は左対称代数である：$[L(x),L(y)] = L(x\bigtriangleup y - y\bigtriangleup x)$.
(2) $\exists s\in V^*$ s.t. $s(x\bigtriangleup y)$ は V の内積.（**認容線型形式**）.
(3) 各 $x\in V$ に対して，$L(x)$ の固有値は実数のみである．

命題 3.8. Ω：V の等質な正則開凸錐 $\Longrightarrow$ V に clan の構造が入る．

証明. (1) と (2) は OK： $s(x) := \operatorname{Tr}L(x)$.
(3) については，$\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H)$ が同時三角化可能であることより． $\square$

命題 3.9. 命題 3.8 の V の clan 構造において，E は単位元である．

証明. $x\in V$ のとき，定義より $x\bigtriangleup E = L(x)E = x$.

一方で，$E\bigtriangleup x = x$ の方は non-trivial．まず H は，1 径数の変換 $x\mapsto e^{\lambda}x$ ($\lambda\in\mathbb{R}$) を含んでいることに注意．これは $GL(\Omega)$ の極大な連結分裂可解群として H を選ん

でいることから来る．したがって，H の Lie 代数 $\mathfrak{h}$ は，1 径数部分群 $\{e^{\lambda} I\}$ の生成元である恒等写像 I を含んでいる．明らかに $IE = E = L(E)E$ であるから，一意性より $L(E) = I$ である．ゆえに $E \triangle x = L(E)x = x$ となって，E は単位元である． □

例 3.10. $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$，$\Omega := \{x \in V \,;\, x \gg 0\}$，$E = I_n \in \Omega$：$n$ 次単位行列．
以下 V に入る clan 構造（単位元は E）を見てみよう．

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_n \end{pmatrix} \;;\; a_i > 0 \ \ (\forall i) \right\} \subset GL(n, \mathbb{R}).$$

H は $GL(n, \mathbb{R})$ の連結分裂可解部分群である．以下 $h \in H$ に対して，$\rho(h)x = hx\,{}^t h$ $(x \in V)$ により $\rho(h) \in GL(V)$ を定義すると，$\rho(h) \in GL(\Omega)$ である．

問題 3.1. ρ により，H は Ω に単純推移的に働く．すなわち，任意の $x \in \Omega$ に対して，$h\,{}^t h = x$ となる $h \in H$ が一意的に存在する．

$\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H)$ とおくと，$\mathfrak{h} = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & * & \\ * & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}$.
以前と同様に，写像 $\rho : h \mapsto \rho(h)$ の H の単位元における微分も同じ記号 ρ で表す．
すなわち，$\rho(X)y = Xy + y\,{}^t X$ $(y \in V)$.
各 $x \in V$ に対して，$\underline{x} \in \mathfrak{h}_n$ を次で定義する：

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & & & 0 \\ x_{21} & \frac{1}{2}x_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_{n1} & \ldots & x_{n,n-1} & \frac{1}{2}x_{nn} \end{pmatrix}.$$

明らかに $x = \underline{x} + {}^t(\underline{x})$．言い換えれば $\rho(\underline{x})E = x$ であるから，定義と一意性から $L(x) = \rho(\underline{x})$．ゆえに

$$x \triangle y = \underline{x}\, y + y\,{}^t(\underline{x}) \qquad (x, y \in V).$$

そして，$s(x) := \mathrm{Tr}\, x$ とおくと，s は認容線型形式である：

$$s(x \triangle y) = \mathrm{Tr}(\underline{x}\, y + y\,{}^t(\underline{x})) = \mathrm{Tr}(xy).$$

これが V のクラン構造で，$E \triangle x = x \triangle E = x$ より，E は単位元である． ∎

一般に Ω が対称錐のとき．V には Euclid 型の Jordan 代数構造が入って，

$$\Omega = \mathrm{Int}\{x^2 \,;\, x \in V\}.$$

$G=GL(\Omega)^\circ$：単位元の連結成分，$K:=G_e$：極大 conpact 群，

$\mathfrak{k}:=\mathrm{Lie}(K)$，$\mathfrak{p}:=\{M(x)\,;\,x\in V\}$ とすると，Cartan 分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を得る．

$c_1,\ldots,c_r$：CSPOI[2] (c_j が **primitive** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\dim V_1(c_j)=1$ $(\forall j)$)．

$\mathfrak{a}:=\mathbb{R}M(c_1)\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}M(c_r)$ は $\mathfrak{p}$ の abelian subspace で極大．

$G=KAN$：岩澤分解 ($A:=\exp\mathfrak{a}$)，$H=AN=A\ltimes N$：岩澤部分群．

H は Ω に単純推移的に働いて，V に clan 構造を定義する．

命題 3.11. V： Euclid 型 Jordan 代数で単純[3]

$\implies M(x)=\frac{1}{2}(L(x)+{}^tL(x))\quad(\forall x\in V)$．

• クランから得られる等質開凸錐．

以下，$(V,\triangle)$：単位元 E を持つ clan．$L(x)y=x\triangle y$：左乗法作用素．

(1) $[L(x),L(y)]=L(x\triangle y-y\triangle x)$，

(2) $\exists s\in V^*$ s.t. $\langle\, x\,|\,y\,\rangle:=s(x\triangle y)$ は V の内積．

(3) $\forall x\in V$ に対して，$L(x)$ は実固有値のみ．

• (3) より，$\mathfrak{h}:=\{L(x)\,;\,x\in V\}$ は分裂可解 Lie 代数．

• $c\in V$ が**ベキ等元** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $c\triangle c=c$

定理 3.12. 次の条件をみたす V_{ji} $(1\leqq i\leqq j\leqq r)$ によって，$V=\sum V_{ji}$ $\cdots(*)$ と直和分解される：

(1) $V_{ii}=\mathbb{R}E_i$ $(i=1,2,\ldots,r)$，

(2) 各 V_{ji} 上では，$L(E_k)=\frac{1}{2}(\delta_{kj}+\delta_{ki})I$，$R(E_k)=\delta_{ki}I$．

分解 $(*)$ を V の**正規分解**という．

正規分解は，荒っぽく言うと，V を次のような，off-diagonal の成分が vector である対称行列の空間と見るということ．

$$V=\begin{pmatrix}\mathbb{R}E_1 & V_{21} & \ldots & V_{n1}\\ V_{21} & \mathbb{R}E_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ V_{n1} & \ldots & & \mathbb{R}E_r\end{pmatrix}$$

[2]complete system of orthogonal primitive idempotents.

[3]このとき，結合的内積は定数倍を除いて一意的．そしてその内積に関する転置 (adjoint) を右辺では考えている．

命題 3.13. 正規分解 $(*)$ があるとき，

(1) $E_i \triangle E_j = \delta_{ij} E_i$，すなわち $E_1, \ldots, E_r$ は直交するべき等元.

(2) $\sum_{k=1}^{r} E_k = E$,

(3) $s(V_{ji}) = 0 \ (i < j)$.

証明. (1) 明らか.

(2) $v \in V$ を $v = \sum_{i=1}^r \lambda_i E_i + \sum_{i<j} v_{ji}$ と表せば，容易に $\left(\sum_{k=1}^r E_k\right) \triangle v = v$. よって

$$\langle E \,|\, v \rangle = s(v) = s\Big(\Big(\sum_{k=1}^{r} E_k\Big) \triangle v\Big) = \Big\langle \sum_{k=1}^{r} E_k \,\Big|\, v \Big\rangle.$$

ゆえに，$E = \sum_{k=1}^r E_k$.

(3) は $v \in V_{ji} \ (i < j)$ のとき，$E_j \triangle v - v \triangle E_j = \frac{1}{2} v$ に s を作用させる. □

命題 3.14. 正規分解 $(*)$ において：

(1) $V_{lk} \triangle V_{kj} \subset V_{lj}$, (2) $V_{lk} \triangle V_{ji} \subset \{0\} \ (k \neq i, j)$,

(3) $V_{lk} \triangle V_{mk} \subset V_{lm}$ または V_{ml} （$l \geqq m$ または $m \geqq l$ に応じて）.

(4) V_{kj} 達は互いに直交する.

命題 3.15. V におけるベキ等元は $E_{i_1} + \cdots + E_{i_k} \ (i_1 < \cdots < i_k)$ の形の元のみ.

系 3.16. c がベキ等元であるとき，$V_c := \{x \in V \,;\, c \triangle x = x\}$ とおく. $\dim V_c = 1$ となるベキ等元（**原始ベキ等元**）c は $E_i \ (i = 1, \ldots, r)$ のみである.

証明. 命題より，$c = E_{i_1} + \cdots + E_{i_k} \ (i_1 < \cdots < i_k)$ の形である. このとき，$V_c = \sum_{s \leqq t} V_{i_t i_s}$ となる. ゆえに，$\dim V_c = 1 \iff k = 1$. □

定義 3.17. 正規分解に現れる r は，V の中の異なる原始ベキ等元の個数に等しい. この r をクラン V の**階数**と呼ぶ.

$\mathfrak{h} := \{L(v) \,;\, v \in V\}$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数.

$V \ni v \mapsto L(v) \in \mathfrak{h}$ は線型同型.

（なぜなら，V は単位元 E を持つので，$L(v) = 0 \implies v = L(v)E = 0$.）

$\mathfrak{a} := \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R} L(E_i)$，$\mathfrak{n}_{ji} := \{L(x) \,;\, x \in V_{ji}\}$，$\mathfrak{n} := \sum_{j>i} \mathfrak{n}_{ji}$ とおくと，$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ である.

以下，$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$：$L(E_1),\ldots,L(E_r)$ に双対な $\mathfrak{a}^*$ の基底．すなわち，

$$\alpha_i(L_{E_j}) = \delta_{ij} \qquad (i,j=1,\ldots,r).$$

命題 3.18. (1) $\mathfrak{a}$ は可換 Lie 代数．

(2) $\mathfrak{n}_{ji} = \{X \in \mathfrak{h}\ ;\ [A,X] = \frac{1}{2}(\alpha_j - \alpha_i)(A)X \ \ (\forall A \in \mathfrak{a})\}$.

(3) $\mathfrak{n}$ はべき零 Lie 代数である．

(4) $[\mathfrak{a},\mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$.

命題 3.18 より，$\mathfrak{h} = \mathfrak{n} \rtimes \mathfrak{a}$（半直積）となることがわかる．

$H := \exp \mathfrak{h}$ とおく．

定理 3.19. Ω は正則開凸錐．

• Vinberg の原論文の証明は凸性の証明にギャップがある[4]．

定理 3.12 の中に入れてしまって，定理 3.19 と一緒に帰納法で示す．

その際に，V の双対クランを絡ませて議論しないといけない．

双対クランについて，手短に説明しよう．まず次の式で V に積 $\triangledown$ を導入する：

$$\langle\, x \triangledown y \,|\, z \,\rangle = \langle\, y \,|\, x \triangle z \,\rangle \qquad (x,y,z \in V)$$

すなわち，${}^tL(x)$ が $(V,\triangledown)$ での左乗法作用素 $L^{\triangledown}(x)$．このとき $(V,\triangledown)$ は clan になり，これを V の**双対クラン**と呼ぶ．s が $(V,\triangle)$ の認容線型形式ならば，$(V,\triangledown)$ の認容線型形式でもある．なぜなら，$\langle\, x \,|\, y \,\rangle_s := s(x \triangle y)$ とおくと，$s(x) = s(x \triangle E) = \langle\, x \,|\, E \,\rangle_s$ ゆえ

$$s(x \triangledown y) = \langle\, x \triangledown y \,|\, E \,\rangle_s = \langle\, y \,|\, x \,\rangle_s.$$

また，E は $(V,\triangledown)$ の単位元でもあることは定義からただちにわかる．

もとの V の正規分解 $V = \sum_{i \leqq j} V_{kj}$ がそのまま使えるが，

$$V_{ji} = \{x \in V\ ;\ L^{\triangledown}_{E_k} x = \tfrac{1}{2}(\delta_{ki} + \delta_{kj})x,\ R^{\triangledown}_{E_i} x = \delta_{kj} x\}.$$

したがって，積のルールは

(1) $V_{ji} \triangledown V_{lk} \subset \{0\}$ $(j \neq k, l)$,

(2) $V_{ki} \triangledown V_{lk} \subset V_{li}$,

(3) $V_{li} \triangledown V_{lk} \subset V_{ki}$ または V_{ik} （$k \geqq i$ または $i \geqq k$ に応じて）．

これの ${}^tH$ 軌道が Ω の双対錐 Ω^* になる．

[4]簡単に済ませ過ぎ．

§4. Jordan 代数の表現からクランを作る

V：Euclid 型 Jordan 代数，単位元を e_0 とする．以下 V は単純とする．
$c_1, \ldots, c_r$：Jordan 枠 (CSOPI)．この r のことを V の**階数**という．
もちろん，clan としての階数にも等しい[1]．

$$V = \begin{pmatrix} \mathbb{R}c_1 & V_{21} & \ldots & V_{r1} \\ V_{21} & \mathbb{R}c_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & V_{r,r-1} \\ V_{r1} & \ldots & V_{r,r-1} & \mathbb{R}c_r \end{pmatrix} \quad (\dim V_{kj}\ (j<k) \text{ は一定}).$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$：$V$ の結合的内積．$\|c_j\| = 1$ $(\forall j)$ と正規化する[2]．

定義 4.1. E は内積を持つ実ベクトル空間．
$\varphi : V \to \mathcal{L}(E)$ が V の**自己共役表現**

$$\overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} (1)\ \varphi \text{ は Jordan 代数として準同型．すなわち，} \varphi \text{ は線型かつ} \\ \qquad \varphi(xy) = \dfrac{1}{2}\big(\varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y)\varphi(x)\big) \qquad (\forall x, y \in V), \\ (2)\ \varphi(x) \in \mathrm{Sym}(E) \quad (\forall x \in V). \end{cases}$$

以下，(φ, E) は V の自己共役表現とし，E の内積を $\langle x \,|\, y \rangle_E$ で表す．
また $\varphi(e_0)$ は E の恒等作用素なるという要請をする．

- $\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_r)$ は等ランクで，互いに直交する射影作用素の完全系．
- $E_i := \varphi(c_i)E$ とおくと，$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$（直交直和）．

補題 4.2. $x \in V_{kj}$ $(1 \le j < k \le r)$ とする．
(1) $i \neq j, k$ のとき，$\varphi(c_i)\varphi(x) = -\varphi(x)\varphi(c_i)$.
(2) $i \neq j, k$ のとき，$\varphi(c_i)\varphi(x)\varphi(c_l) = \varphi(c_l)\varphi(x)\varphi(c_i) = 0$ $(l = 1, \ldots, r)$.
(3) $\varphi(c_j)\varphi(x)\varphi(c_j) = \varphi(c_k)\varphi(x)\varphi(c_k) = 0$.
(4) $\varphi(x) = \varphi(c_j)\varphi(x)\varphi(c_k) + \varphi(c_k)\varphi(x)\varphi(c_j)$.

証明. (1) $c_i x = 0$ より，$0 = 2\varphi(c_i x) = \varphi(c_i)\varphi(x) + \varphi(x)\varphi(c_i)$．以下証明略． □

各 $x \in V$ を $x = \sum_i \lambda_i c_i + \sum_{j>k} x_{kj}$ と表して，

$$\underline{\varphi}(x) := \frac{1}{2}\sum_i \lambda_i \varphi(c_i) + \sum_{j<k} \varphi(c_k)\varphi(x_{kj})\varphi(c_j).$$

[1] $M(c_i) = L(c_i)$ ゆえ，$c_1, \ldots, c_r$ は clan としての V でもベキ等元.
[2] V の trace を使って，$\langle x \,|\, y \rangle = \mathrm{tr}(xy)$ をとることにあたる.

このとき，補題 4.2 より，$\underline{\varphi}(x) + \underline{\varphi}(x)^* = \varphi(x)$.

$\underline{\varphi}(x)$ は $\varphi(x)$ の「**下三角部分**」.

表現 (φ, E) に付随する双線型写像 $Q : E \times E \to V$ を次で定義する.

$$\langle\, Q(\xi,\eta) \,|\, x \,\rangle = \langle\, \varphi(x)\xi \,|\, \eta \,\rangle \qquad (x \in V,\ \xi,\eta \in E).$$

以下，$\Omega := \mathrm{Int}\{v^2\ ;\ v \in V\}$ とする（V の対称錐）.

補題 4.3. Q は Ω-positive である：

$$Q(\xi,\xi) \in \overline{\Omega}\ (\forall \xi \in E)，かつ\ Q(\xi,\xi) = 0 \iff \xi = 0.$$

証明. $\forall v \in V$ に対して $\varphi(v^2) = \varphi(v)^2$ より，

$$\langle\, Q(\xi,\xi) \,|\, v^2 \,\rangle = \langle\, \varphi(v^2)\xi \,|\, \xi \,\rangle_E = \|\, \varphi(v)\xi \,\|^2 \geqq 0.$$

これは $\forall y \in \overline{\Omega}$ に対して，$\langle\, Q(\xi,\xi) \,|\, y \,\rangle \geqq 0$ を意味する．実際，$x_0 \in \Omega$ を一つとり，$\forall \varepsilon > 0$ に対して $x_\varepsilon := Q(\xi,\xi) + \varepsilon x_0$ を考える．$\forall y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して

$$\langle\, x_\varepsilon \,|\, y \,\rangle = \langle\, Q(\xi,\xi) \,|\, y \,\rangle + \varepsilon\langle\, x_0 \,|\, y \,\rangle > 0.$$

ゆえに $x_\varepsilon \in \Omega^* = \Omega$．ここで，$\varepsilon \to +0$ とすれば $Q(\xi,\xi) \in \overline{\Omega}$ が出る.

また $Q(\xi,\xi) = 0$ とすると，$0 = \langle\, Q(\xi,\xi) \,|\, e_0 \,\rangle = \|\, \xi \,\|^2$ より，$\xi = 0$. □

V を clan と見，その clan 積を単に $\triangle$ で表して，$V_E := E \oplus V$ に積を次で導入する：

$$(\xi + x) \triangle (\eta + y) := \underline{\varphi}(x)\eta + (Q(\xi,\eta) + x \triangle y) \qquad (x, y \in V,\ \xi,\eta \in E).$$

定理 4.4. $(V_E, \triangle)$ は，認容線形形式が $s'(\xi + x) := \mathrm{Tr}\, L(x)$ で与えられる clan.

証明には，次の各命題を用いる.

命題 4.5. φ は clan としての V の表現でもある．すなわち，φ は V から $\mathrm{Sym}(E)$ への clan 準同型になっている.

$$\varphi(x \triangle y) = \underline{\varphi}(x)\varphi(y) + \varphi(y)\underline{\varphi}(x)^* \qquad (\forall x, y \in V).$$

証明は，Nakashima–Nomura, Kyushu J. Math., **67** (2013) の Proposition 3.3 参照.

命題 4.6. $x \triangle Q(\xi,\eta) = Q(\underline{\varphi}(x)\xi,\eta) + Q(\xi,\underline{\varphi}(x)\eta)$.

証明. (1) φ は双対 clan$(V, \triangledown)$ の表現にもなっている.

$\because$) 関係式 $M(x) = \frac{1}{2}(L(x) + {}^tL(x))$ を思い出すと，

$$\begin{aligned}\varphi({}^tL(x)y) &= 2\varphi(M(x)y) - \varphi(L(x)y)\\ &= \varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y)\varphi(x) - \big(\underline{\varphi}(x)\varphi(y) + \varphi(y)\underline{\varphi}(x)^*\big)\\ &= \underline{\varphi}(x)^*\varphi(y) + \varphi(y)\underline{\varphi}(x).\end{aligned}$$

(2) 命題の証明は，(1) より

$$\begin{aligned}\langle\, x \triangle Q(\xi,\eta) \,|\, y \,\rangle &= \langle\, Q(\xi,\eta) \,|\, {}^tL(x)y \,\rangle = \langle\, \varphi({}^tL(x)y)\xi \,|\, \eta \,\rangle_E \\ &= \langle\, (\underline{\varphi}(x)^*\varphi(y) + \varphi(y)\underline{\varphi}(x))\xi \,|\, \eta \,\rangle_E \\ &= \langle\, \varphi(y)\xi \,|\, \underline{\varphi}(x)\eta \,\rangle_E + \langle\, \varphi(y)\underline{\varphi}(x)\xi \,|\, \eta \,\rangle_E \\ &= \langle\, Q(\xi,\underline{\varphi}(x)\eta) \,|\, y \,\rangle + \langle\, Q(\underline{\varphi}(x)\xi,\eta) \,|\, y \,\rangle. \end{aligned}$$

□

以下，$[x \triangle y] := x \triangle y - y \triangle x$ とおく．

補題 4.7. $\underline{\varphi}([x \triangle y]) = [\underline{\varphi}(x), \underline{\varphi}(y)] \quad (x, y \in V)$.

証明. φ が $(V, \triangle)$ の表現であることから，

$$\varphi([x \triangle y]) = \underline{\varphi}(x)\varphi(y) + \varphi(y)\underline{\varphi}(x)^* - \underline{\varphi}(y)\varphi(x) - \varphi(x)\underline{\varphi}(y)^*.$$

ここで，$\varphi(x) = \underline{\varphi}(x) + \underline{\varphi}(x)^*$ などを代入して整理すると

$$\varphi([x \triangle y]) = [\underline{\varphi}(x), \underline{\varphi}(y)] + \big([\underline{\varphi}(x), \underline{\varphi}(y)]\big)^*.$$

両辺の下三角部分をとれば証明終わり． □

定理 4.4 の証明. $L'(\xi + x)$ を V_E の左乗法作用素とすると，定義から

$$L'(\xi + x) = \begin{pmatrix} \underline{\varphi}(x) & 0 \\ Q(\xi, \cdot) & L(x) \end{pmatrix}.$$

ゆえに $L'(\xi + x)$ は同時下三角化可能．次に左対称代数であることは，

$$\begin{aligned} &L'(\xi + x)L'(\eta + y) - L'(\eta + y)L'(\xi + x) \\ &= \begin{pmatrix} [\underline{\varphi}(x), \underline{\varphi}(y)] & 0 \\ Q\big(\xi,\underline{\varphi}(y)(\cdot)\big) + x \triangle Q(\eta, \cdot) - Q\big(\eta,\underline{\varphi}(x)(\cdot)\big) - y \triangle Q(\xi, \cdot) & [L(x), L(y)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \underline{\varphi}([x \triangle y]) & 0 \\ Q\big(\underline{\varphi}(x)\eta - \underline{\varphi}(y)\xi, \cdot\big) & L([x \triangle y]) \end{pmatrix} \\ &= L'\big([(\xi + x) \triangle (\eta + y)]\big). \end{aligned}$$

最後に，定理の主張中の s' に対して，積の定義より，

$$s'\big((\xi + x) \triangle (\eta + y)\big) = s(Q(\xi,\eta)) + s(x \triangle y) \qquad (\xi,\eta \in E,\ x, y \in V).$$

さらに，$\mathrm{Tr}\, L(x) = \mathrm{Tr}\, M(x)$，かつ $\mathrm{Tr}\, M(xy)$ が Euclid 型 Jordan 代数の結合的内積であるということから，定数 $k > 0$ を用いて，

$$s(Q(\xi,\eta)) = \mathrm{Tr}\, L(Q(\xi,\eta)) = k\langle\, Q(\xi,\eta) \,|\, e_0 \,\rangle = k\langle\, \xi \,|\, \eta \,\rangle_E.$$

以上で証明終わり． □

さて $\dim E > 0$ ならば，V_E は単位元を持たない．実際 $\eta_0 + y_0$ が単位元だとすると，$0 \neq \xi \in E$ をとるとき

$$\xi = \xi \triangle (\eta_0 + y_0) = Q(\xi,\eta_0) \in V.$$

という矛盾を得る．そこで，単位元 e を V_E に添加し，それを V_E^0 とする．以下では，$u := e - e_0$ とおいて[3]，$V_E^0 = \mathbb{R}u \oplus E \oplus V$ として見ていく．

• V_E^0 のイメージ：
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \\ & \ddots & & {}^tE \\ & & \lambda & \\ \hline & E & & V \end{array}\right).$$

V_E^0 の積は

$$(\lambda u + \xi + x) \triangle (\mu u + \eta + y) = (\lambda\mu)u + (\mu\xi + \tfrac{1}{2}\lambda\eta + \underline{\varphi}(x)\eta) + (Q(\xi,\eta) + x \triangle y),$$

単位元を持つ clan である V_E^0 に対応する等質開凸錐を Ω^0 で表す．Ω^0 を記述しよう．まず Jordan 代数 V の表現から得られた双線型写像 Q を思い出す．V の対称錐を Ω と書いていて，Q は Ω-positive であった．そこから，実 Siegel 領域 $D(\Omega, Q)$ を定義できる．

$$D(\Omega, Q) := \{\xi + x \in V_E \,;\, x - \tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi) \in \Omega\}.$$

• $D(\Omega, Q)$ は V_E の正則な（すなわち直線を含まない）凸領域である．

• 命題 4.6 より

$$(\exp L(x))Q(\xi,\eta) = Q\big((\exp \underline{\varphi}(x)\xi,\, (\exp \underline{\varphi}(x)\eta\big) \qquad (x \in V,\ \xi,\eta \in E).$$

命題 4.8. $D(\Omega, Q)$ はアフィン等質である．

証明. まず，$H := \{\exp L(z) \,;\, z \in V\}$ は Ω に単純推移的に働いていたことを思い出す．次に，V_E 上のアフィン変換 n_ζ $(\zeta \in E)$ と h_z $(z \in V)$ を次式で定義する．

$$\begin{cases} n_\zeta(\xi + x) := (\xi + \zeta) + (x + Q(\xi,\zeta) + \frac{1}{2}Q(\zeta,\zeta)), \\ h_z(\xi + x) := (\exp \underline{\varphi}(z))\xi + (\exp L(z))x, \end{cases} \qquad (\xi \in E,\, x \in V).$$

$\xi' + x' = n_\zeta h_z(\xi + x)$ $(\xi' \in E,\, x' \in V)$ とおくと，

$$x' - \tfrac{1}{2}Q(\xi',\xi') = (\exp L(z))(x - \tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi)).$$

これは，n_ζ と h_z が $D(\Omega, Q)$ を不変にすることを意味する．

$$N_D := \{n_\zeta \,;\, \zeta \in E\}, \qquad H_D := \{h_z \,;\, z \in V\} \cong H.$$

[3] e_0 は V の単位元．

N_D は可換群： $n_\zeta n_{\zeta'} = n_{\zeta+\zeta'}$.
$h_z n_\zeta h_z^{-1} = n_{\zeta'}$ $(\zeta' = (\exp \underline{\varphi}(z))\zeta)$ より，半直積群 $H(D) := N_D \rtimes H_D$ を考えることができる．さて $\xi + x \in D(\Omega, Q)$ が与えられたとき，方程式

$$n_\zeta h_z(0 + e_0) = \xi + x \tag{4.1}$$

は一意解 $\zeta = \xi \in E$，$z \in V$ を持つ．ただし z は $(\exp L(z))e_0 = x - \frac{1}{2}Q(\xi,\xi) \in \Omega$ で一意的に決まる元．ゆえに $H(D)$ は $D(\Omega, Q)$ に単純推移的に働く． $\square$

命題 4.9. $\Omega^0 = \{\lambda u + \lambda\xi + \lambda x \in V_E^0\ ;\ \lambda > 0,\ \xi + x \in D(\Omega, Q)\}$

$= \{\lambda u + \xi + x \in V_E^0\ ;\ \lambda > 0,\ \lambda\ x - \frac{1}{2}Q(\xi,\xi) \in \Omega\}$.

証明. 2 個目の等号は Ω が錐であることから．Ω^1 を $u + D(\Omega, Q) \subset V_E^0$ と $0 \in V_E^0$ で生成される開凸錐とする．Ω^1 は命題の中の 1 行目の右辺の集合に等しい．$\zeta \in E$ と $z \in V$ に対して，$V_E^0 = \mathbb{R}u \oplus E \oplus V$ 上の線型写像 n_ζ^0 と h_z^0 を次で定義する．

$$n_\zeta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \zeta & \mathrm{id}_E & 0 \\ \frac{1}{2}Q(\zeta,\zeta) & Q(\cdot,\zeta) & \mathrm{id}_V \end{pmatrix}, \qquad h_z^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp \underline{\varphi}(z) & 0 \\ 0 & 0 & \exp L(z) \end{pmatrix},$$

容易に，

$$n_\zeta^0(u + \xi + x) = u + n_\zeta(\xi + x), \qquad h_z^0(u + \xi + x) = u + h_z(\xi + x).$$

ゆえに，n_ζ^0 と h_z^0 は $u + D(\Omega, Q)$ を安定にするので，$GL(\Omega^1)$ に属する．

さて $\lambda u + \lambda\xi + \lambda x \in \Omega^1$ が与えられたとき，ζ と z を (4.1)で定めると[4],

$$\lambda \cdot (n_\zeta^0 h_z^0)(u + e_0) = \lambda u + \lambda\xi + \lambda x.$$

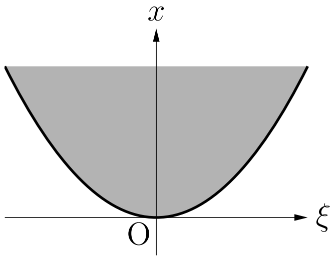
ゆえに Ω^1 は等質である．一方，積の定義から

$$L^0(\lambda e + \xi + x) = \lambda \cdot \mathrm{id}_{V_E^0} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi & \underline{\varphi}(x) & 0 \\ 0 & Q(\,\cdot\,,\xi) & L(x) \end{pmatrix}.$$

$n_\zeta^0 = \exp L^0(\zeta)$，および $h_z^0 = \exp L^0(z)$ より，Ω^1 が V_E^0 に対応する等質開凸錐であることがわかる． $\square$

[4] $e = u + e_0$ であることを思い出しておく．

例 4.10. $V=\mathbb{R}$, $\Omega=\mathbb{R}_{>0}$, $E=\mathbb{R}$, $\varphi(x)\xi=x\xi$ のとき.



$Q(\xi,\eta)=\xi\eta$ となるから,

$$D(\Omega,Q)=\{(\xi,x)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x-\tfrac{1}{2}\xi^2>0\}.$$

各 $t\in\mathbb{R}$ に対して, $h_t(\xi,x):=(e^{t/2}\xi,e^tx)$

各 $\zeta\in\mathbb{R}$ に対して, $n_\zeta(\xi,x):=(\xi+\zeta,\ x+\xi\zeta+\tfrac{1}{2}\zeta^2)$

- $h_t: x=\frac{1}{2}\xi^2+1\mapsto\frac{1}{2}\xi^2+e^t$ (放物線の移動)
- n_ζ：放物線 $x=\frac{1}{2}\xi^2+a$ $(a>0)$ 上の運動.

$\Omega^0=\{\lambda,\xi,x)\ ;\ \lambda>0,\ \lambda\, x-\frac{1}{2}\xi^2>0\}$. 実のところ, これは Lorentz 錐（水色）.
平面 $\lambda=1$（黄色）で切ると, Siegel 領域（放物線の上側）が現れる.

例 4.11. $V=\mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$, $\Omega=\mathrm{Pos}(r,\mathbb{R})$, $E=\mathrm{Mat}(r\times p,\mathbb{R})$, $\varphi(x)\xi=x\xi$.
E には $\mathrm{Tr}(\xi\,{}^t\eta)$ で内積を入れる.

- V の自己共役表現はこれで尽きる.
- $Q(\xi,\xi)=\xi\,{}^t\xi$.
- $D(\Omega,Q)=\{(\xi,x)\ ;\ x-\frac{1}{2}\xi\,{}^t\xi\gg 0\}$.
- $\Omega^0=\{(\lambda,\xi,x)\ ;\ \lambda>0,\ \lambda\, x-\frac{1}{2}\xi\,{}^t\xi\gg 0\}$.
- $\Omega^0\cong\left\{X=\begin{pmatrix}\lambda I_p & {}^t\xi\\ \xi & x\end{pmatrix}\ ;\ \begin{matrix}\lambda\in\mathbb{R},\ \xi\in E,\ x\in V,\\ X\gg 0\end{matrix}\right\}$

§5. 基本相対不変式

例 5.1. $V = \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$ のとき．$G = GL(r,\mathbb{R})$ は，

$$\rho(g)x := gx\,{}^t g \qquad (g \in GL(r,\mathbb{R}),\, x \in V)$$

で V に働く．

$\Omega := \{x \in V\ ;\ x \gg 0\}$ は単位行列 $e := I_r$ を通る $\rho(G)$ の軌道：$\Omega = \rho(G)e$.

$H := \left\{ h = \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & h_r \end{pmatrix}\ ;\ h_j > 0\ (\forall j) \right\} \subset G$ は Ω に単純推移的に働く．

$x = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{r1} & \dots & x_{rr} \end{pmatrix} \in V$ に対して，$\Delta_j(x) := \mathrm{Det}\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{j1} & \dots & x_{jj} \end{pmatrix}$ とおく．

● **基本的性質.**

(1) 各 $h \in H$ に対して，$\chi_j(h) = h_1 \cdots h_j$ $(j = 1, \dots, r)$ とおくとき，

$$\Delta_j(\rho(h)x) = \chi_j(h)^2 \Delta_j(x).$$

$\because$) $h \in H$，$x \in V$ を分割して，左上を $j \times j$ 行列として，

$$h = \left(\begin{array}{c|c} h' & 0 \\ \hline * & h'' \end{array}\right), \qquad x = \left(\begin{array}{c|c} x' & * \\ \hline * & * \end{array}\right)$$

と表す．ここで h', x' はそれぞれ h, x のサイズを $j \times j$ しただけの同様の行列であることに注意．また $\Delta_j(x) = \mathrm{Det}(x')$ である．

$$\begin{aligned} hx\,{}^t h &= \left(\begin{array}{c|c} h' & 0 \\ \hline * & h'' \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} x' & * \\ \hline * & * \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} {}^t h' & * \\ \hline 0 & {}^t h'' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} h'x' & * \\ \hline * & * \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} {}^t h' & * \\ \hline 0 & {}^t h'' \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} h'x'\,{}^t h' & * \\ \hline * & * \end{array}\right). \end{aligned}$$

ゆえに，$\Delta_j(\rho(h)x) = \mathrm{Det}(h'x'\,{}^t h') = \mathrm{Det}(h')^2\,\mathrm{Det}(x') = \chi_j(h)^2 \Delta_j(x)$.

ここで，χ_j は群準同型 $H \to \mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ であることに注意（1 次元表現）.

定義 5.2. 一般に，Ω 上の関数 f が（H の作用に関して）**相対不変**である
$\overset{\mathrm{def}}{\iff}$ $\exists \chi : H \to \mathbb{R}^\times$（1 次元表現） s.t. $f(\rho(h)x) = \chi(h) f(x)$ $(\forall h \in H,\, x \in \Omega)$.

したがって，多項式函数 Δ_j $(j = 1, \dots, r)$ は相対不変である．

(2) $j = 1, 2, \dots, r$ について，多項式 $\Delta_j(x)$ は既約である．

$\because$) たとえば帰納法と行（あるいは列）展開.

(3) P：V 上の相対不変な多項式函数 $\Longrightarrow$ $\tau_j \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ $(j=1,\dots,r)$ s.t.

$$P(x) = P(e)\Delta_1(x)^{\tau_1}\cdots\Delta_j(x)^{\tau_r}.$$

$\because$) $P(\rho(h)x) = \chi(h)P(x)$ とする．まず，$\chi(h) = h_1^{\alpha_1}\cdots h_r^{\alpha_r}$ という形をしていることに注意．実際，左上を 1×1 行列として

$$n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ n_{21} & \ddots & & \text{\huge 0} \\ \vdots & \ddots & 1 & \\ n_{r1} & \dots & n_{r,r-1} & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \boldsymbol{n} & n' \end{array}\right) \in H, \qquad h = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & h' \end{array}\right) \in H$$

のとき，

$$\begin{aligned} hnh^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & h' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \boldsymbol{n} & n' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & (h')^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline h'\boldsymbol{n} & h'n'(h')^{-1} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline h'\boldsymbol{n} & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & h' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & n' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & (h')^{-1} \end{array}\right). \end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} \chi\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \boldsymbol{n} & n' \end{array}\right) &= \chi(n) = \chi(hnh^{-1}) \\ &= \chi\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline h'\boldsymbol{n} & 1 \end{array}\right)\chi\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & n' \end{array}\right) = \chi\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline h'\boldsymbol{n} & n' \end{array}\right). \end{aligned}$$

ゆえに χ は $\boldsymbol{n}$ について定数．
帰納的に議論すれば，χ は n について定数であることがわかる．
H の一般の元は na $(a := \mathrm{diag}[h_1,\dots,h_r])$ と書けるから，

$$\chi(na) = \chi(a) = h_1^{\alpha_1}\dots h_r^{\alpha_r}.$$

$P(h^th) = \chi(h)P(e)$ ゆえ，$x = h^th$ $\cdots\cdots$ ① のとき，h の対角成分を求める．

$h = \begin{pmatrix} h_1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge $*$} & & h_r \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} h' & 0 \\ \hline {}^t\eta & h_r \end{array}\right)$ とおく．まず①の両辺の行列式を考えて，

$$\mathrm{Det}\, x = \mathrm{Det}(h^th) = (\mathrm{Det}\, h)^2 = (h_1\cdots h_r)^2. \quad \cdots\cdots ②$$

次に，$x = \left(\begin{array}{c|c} x' & \xi \\ \hline {}^t\xi & x_{rr} \end{array}\right)$ とおくと，

$$x = h^th = \left(\begin{array}{c|c} h' & 0 \\ \hline {}^t\eta & h_r \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} {}^th' & \eta \\ \hline 0 & h_r \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} h'{}^th' & h'\eta \\ \hline {}^t(h'\eta) & {}^t\eta\eta + h_r^2 \end{array}\right). \quad \cdots\cdots ③$$

③より

$$\Delta_{r-1}(x) = \mathrm{Det}\, x' = \mathrm{Det}(h'{}^th') = (\mathrm{Det}\, h')^2 = (h_1\cdots h_{r-1})^2. \quad \cdots\cdots ④$$

②と④より，$h_r = \dfrac{\sqrt{\operatorname{Det} x}}{h_1 \cdots h_{r-1}} = \dfrac{\sqrt{\Delta_r(x)}}{\sqrt{\Delta_{r-1}(x)}}$.

同様にして，$h_j = \dfrac{\sqrt{\Delta_j(x)}}{\sqrt{\Delta_{j-1}(x)}}$ もわかる．ゆえに

$$\begin{aligned}\chi(h) = h_1^{\alpha_1} \cdots h_r^{\alpha_r} &= \Delta_1(x)^{\alpha_1/2} \left[\frac{\Delta_2(x)}{\Delta_1(x)}\right]^{\alpha_2/2} \cdots \left[\frac{\Delta_r(x)}{\Delta_{r-1}(x)}\right]^{\alpha_r/2} \\ &= \Delta_1(x)^{(\alpha_1-\alpha_2)/2} \cdots \Delta_{r-1}(x)^{(\alpha_{r-1}-\alpha_r)/2} \Delta_r(x)^{\alpha_r/2}.\end{aligned}$$

したがって，

$$P(x) = P(e)\Delta_1(x)^{(\alpha_1-\alpha_2)/2} \cdots \Delta_{r-1}(x)^{(\alpha_{r-1}-\alpha_r)/2} \Delta_r(x)^{\alpha_r/2}. \quad \cdots\cdots ⑤$$

まず，$x = \operatorname{diag}[1, \ldots, 1, \xi]$ とおくときの⑤の右辺は ξ の多項式でないといけないことにより，α_r は非負偶数であることがわかる．

次に，$x = \left(\begin{array}{c|c} I_{r-2} & O \\ \hline O & \begin{matrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{c|cc|c} I_{r-3} & & O & \\ \hline O & \varepsilon & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, $\ldots$, $\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & O \\ \hline O & I_{r-2} \end{array}\right)$ と順においていき，そのときの⑤の右辺が ε の多項式でないといけないことより，

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_{r-1} - \alpha_r),\ \tfrac{1}{2}(\alpha_{r-2} - \alpha_{r-1}),\ \ldots,\ \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)$$

が非負整数であることがわかる．ゆえに，非負整数 τ_j $(j = 1, \ldots, r)$ をとって，

$$P(x) = P(e)\Delta_1(x)^{\tau_1} \ldots \Delta_r(x)^{\tau_r}.$$

- 以上のことを以て，
  $\Delta_1(x)$，…，$\Delta_r(x)$ は $\mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ の，あるいは $\Omega := \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ に付随する
  基本相対不変式であるという．

さて，$V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ は clan でもあった．

$$x \triangle y = \underline{x}\, y + y\, {}^t(\underline{x}) = R(y)x.$$

ただし，$x = (x_{ij}) \in V$ に対して，

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & & & \\ x_{21} & \frac{1}{2}x_{22} & \text{\Large 0} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_{r1} & \cdots & x_{r,r-1} & \frac{1}{2}x_{rr} \end{pmatrix}.$$

定理 5.3. $\operatorname{Det} R(y) = \Delta_1(y)\Delta_2(y) \cdots \Delta_r(y)$.

証明. $x = \left(\begin{array}{c|c} x' & \xi \\ \hline {}^t\xi & x_r \end{array}\right)$，$y = \left(\begin{array}{c|c} y' & \eta \\ \hline {}^t\eta & y_r \end{array}\right)$ とおくと，

$$R(y)x = x \mathbin{\triangle} y = \left(\begin{array}{c|c} \underline{x'} & 0 \\ \hline {}^t\xi & \frac{1}{2}x_r \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} y' & \eta \\ \hline {}^t\eta & y_r \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} y' & \eta \\ \hline {}^t\eta & y_r \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} {}^t(\underline{x'}) & \xi \\ \hline 0 & \frac{1}{2}x_r \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} x' \mathbin{\triangle} y' & \underline{x'}\eta + y'\xi + \frac{1}{2}x_r\eta \\ \hline {}^t\eta\,{}^t(\underline{x'}) + {}^t\xi y' + \frac{1}{2}x_r\,{}^t\eta & 2\langle\,\xi\,|\,\eta\,\rangle + x_r y_r \end{array}\right).$$

これを，$x = \begin{pmatrix} x' \\ \xi \\ x_r \end{pmatrix}$ と書くことに対応した作用素行列で書くと

$$R(y) = \begin{pmatrix} R'(y') & 0 & 0 \\ * & y' & \frac{1}{2}\eta \\ 0 & 2\langle\,*\,|\,\eta\,\rangle & y_r \end{pmatrix} \qquad (R'(y')x' := x' \mathbin{\triangle} y').$$

ゆえに，$\operatorname{Det} R(y) = \operatorname{Det} R'(y') \operatorname{Det} \begin{pmatrix} y' & \frac{1}{2}\eta \\ 2\langle\,*\,|\,\eta\,\rangle & y_r \end{pmatrix}$．ここで

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_{r-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y' & \eta \\ \langle\,*\,|\,\eta\,\rangle & y_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\,I_{r-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' & \frac{1}{2}\eta \\ 2\langle\,*\,|\,\eta\,\rangle & y_r \end{pmatrix}$$

より，$\operatorname{Det} R(y) = \operatorname{Det} R'(y') \operatorname{Det} \begin{pmatrix} y' & \eta \\ \langle\,*\,|\,\eta\,\rangle & y_r \end{pmatrix}$．自然な基底をとって考えると，

$$\operatorname{Det} R(y) = \operatorname{Det} R'(y') \operatorname{Det} \begin{pmatrix} y' & \eta \\ {}^t\eta & y_r \end{pmatrix} = \operatorname{Det} R'(y') \operatorname{Det} y = \Delta_r(y) \operatorname{Det} R'(y').$$

これを続ければよい．$\operatorname{Det}(y') = \Delta_{r-1}(y)$ に注意． □

系 5.4. 基本相対不変式は，右乗法作用素の行列式の既約成分に一致する．
一般の clan では，正整数 $n_1, \dots, n_r$ により，$\operatorname{Det} R(y) = \Delta(\ y)^{n_1} \cdots \Delta(y)^{n_r}$ となる．ここで $n_1, \dots, n_r$ の一般的表示も得られている (H. Nakashima, 2013).