得点 [1]	得点 [2]	得点 [3]	得点 [4]	合計点	整理番号

微分積分学 B：期 末 試 験

1 枚 目（4 枚あります） 2014 年 2 月 7 日出題 10:30〜12:00

学生番号 氏名

得点

[1] 函数 $f(x, y) := 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ に極値があれば，それを求めよ．
極値の場合は，極大か極小かも判定すること．

微分積分学 B： 期 末 試 験

2 枚 目（4 枚あります） 2014 年 2 月 7 日出題　10:30〜12:00

氏名

得点

[**2**] $f(x,y,z)$ はなめらかな函数とする．また

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad D := x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

とする．すなわち，$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$，$Df = xf_x + yf_y + zf_z$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\Delta(Df) = D(\Delta f) + 2\Delta f$ であることを示せ．

(2) $\Delta f = 0$ のとき，$\Delta\big((x^2+y^2+z^2)f\big)$ を f と Df を用いて表せ．

(3) $\Delta f = 0$ のとき，$\Delta^2\big((x^2+y^2+z^2)f\big) = 0$ であることを示せ．ただし，$\Delta^2 g$ とは $\Delta(\Delta g)$ のことである．

微分積分学 B： 期 末 試 験

3 枚 目（4 枚あります） 2014 年 2 月 7 日出題　10:30〜12:00

氏名

得点

[3]　以下 $\boldsymbol{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ とし，$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{x^2 + y^2}$ とおく．

(1) $\log(1+u) = u - \dfrac{1}{2}u^2 + R(u)$ とおく．$u \to 0$ のとき，$R(u) = o(u^2)$ であることは前期で学習したので証明なしで使う．ここで $u := 2y + x^2 + y^2 = 2y + \|\boldsymbol{x}\|^2$ とすると，

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0} \text{ のとき，} R(u) = o(\|\boldsymbol{x}\|^2)$$

であることを示せ．

(2) 函数 $f(x, y) := \bigl(x^2 + (1+y)^2\bigr)^x$ の原点における 3 階までの（3 階も含める）各偏微分係数をすべて求めよ．

微分積分学 B： 期 末 試 験

4 枚 目（最後のページです） 2014 年 2 月 7 日出題　10:30〜12:00

氏名

得点

[4] $f(x,y) := (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$ とし，平面曲線 $N_f : f(x,y) = 0$ を考える．
N_f はレムニスケートと呼ばれる曲線である．以下の各問いに答えよ．

(1) 極座標を利用して，N_f は有界であることを示せ．さらに N_f 上では $|x| \leqq \sqrt{2}$ であることも示せ．

(2) N_f の特異点を求めよ．それはどのような特異点か．結節点ならば，その点における接線も求めること．

(3) N_f の通常点（非特異点）で，座標軸に平行な接線を持つ点をすべて求めよ．