得点 [1] 得点 [2] 得点 [3] 得点 [4] 得点 [5] 合計点 整理番号

微分積分学 A：期 末 試 験

1 枚 目（4 枚あります） 2013 年 7 月 26 日出題　10:30〜12:00

学生番号　　　　　　　　　　　　氏名

得点

[1] (1) $y = \mathrm{Arctan}\,x$ のとき，$y^{(n)} = (n-1)!\,(\cos^n y)\sin\left(ny + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ であることを示せ．

(2) $x \to 0$ のとき，$\mathrm{Arctan}\,x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o(x^5)$ とするとき，$a_0 \sim a_5$ を (1) を利用して求めよ（a_k と $f^{(k)}(0)$ の関係に注意：等号ではない）．

微分積分学 A： 期 末 試 験

　2013 年 7 月 26 日出題　10:30〜12:00

氏名

得点

[2] 以下の問いに答えよ．

(1) $y \to 0$ のとき，

$$\mathrm{Arctan}\, y = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + a_5 y^5 + o(y^5) \ \cdots\cdots \ ①$$

とするとき，$a_0 \sim a_5$ を問題 [1] の (2) で求めた．一方 $x \to 0$ のとき，$\tan x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + o(x^5)$ とする（この段階で，いくつかの b_k を決めておく方がよい）．$y = \tan x$ を①（ただし $a_0 \sim a_5$ は [1] の (2) で求めた値）に代入することにより，$b_0 \sim b_5$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x + \tan x - 3x}{x^5}$ を求めよ．

微分積分学 A： 期 末 試 験

3 枚 目（4 枚あります） 2013 年 7 月 26 日出題　10:30〜12:00

氏名

得点

[**3**]　函数 $f(x) := \begin{cases} x^{\sin x} & (0 < x \leqq 1) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$ を考える．

(1) $f(x)$ は $x = 0$ で右連続であることを示せ．

(2) $f(x)$ は $x = 0$ で右微分可能かどうかを調べて，結論を述べよ．

微分積分学 A： 期 末 試 験

４ 枚 目（最後のページです） 2013 年 7 月 26 日出題　10:30〜12:00

氏名

得点

[4]　$f(x)$ は $\mathbb{R}$ で微分可能であって，$f(0)=0$ であるとする．また，すべての $x \geqq 0$ で $f(x) \geqq x$ が成り立っているとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$0 < c < \varepsilon$ をみたす c で $f'(c) \geqq 1$ となるものが存在することを示せ.（ヒント：$F(x) := f(x) - x$ を考えて，背理法を用いる.）

得点

[5]　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \alpha$，かつ $\alpha < 1$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ.

（ヒント： $\alpha < r < 1$ をみたす実数 r があることに注意する.）