数学 IB：期 末 試 験

1 枚 目（4 枚あります）　　2013 年 1 月 29 日出題　10:30〜12:00

学生番号　　　　　　　　　　　　氏名

[1] 次の各命題は正しいか．正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ．理由がないと零点である．

(1) どんな複素数 z に対しても $|\sin z| \leqq 1$ が成り立つ．

(2) どんな複素数 z に対しても $e^z \neq 0$ である．

(3) $\log(-2)$ を定義することができるが，実数ではない．

(4) i^i（虚数単位 i の i 乗）の取り得る値はすべて実数である．

(5) $\sin z = 0$ をみたす複素数 z は実数だけである．

数学 IB： 期 末 試 験

　　2013 年 1 月 29 日出題　10:30〜12:00

氏名

[**2**]　C は原点を中心とする半径 2 の円で，積分は反時計回りとして，

$$I_m := \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^3 + \sin z}{(z-i)^m}\,dz \qquad (m = 0, 1, 2, 3)$$

を考える．ただし，$(z-i)^0$ は恒等的に 1 という函数であるとする．

(1) I_0 と I_1 の値は何か．拠り所とした定理や公式の名は正確に挙げること．

(2) ある解析函数の何階目かの微分係数と関係させることで I_2 と I_3 を求めよ．

数学 IB： 期 末 試 験

3 枚 目（4 枚あります）　　2013 年 1 月 29 日出題　10:30〜12:00

氏名

[**3**] (1) ベキ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ の収束半径を求めよ.

(2) (1) のベキ級数の和を求めよ.

(3) ベキ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ の和を求めよ.

数学 IB： 期 末 試 験

　　2013 年 1 月 29 日出題　10:30〜12:00

氏名

---

[4]　(1) e^z の $z = 0$ における Taylor 級数を書き下し，その収束半径は ∞ であることを示せ.

(2) (1) を利用して，$\sin z$ の $z = 0$ における Taylor 級数を書き下せ.

(3) $\dfrac{1}{\sin z}$ は $z = 0$ に 1 位の極を持つことを示せ.

(4) $\dfrac{1}{\sin z}$ の $z = 0$ における留数を求めて，次の積分の値を求めよ.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{\sin z} \quad (C \text{ は単位円 } |z| = 1 \text{ で，積分は反時計回り})$$