数学 IB：中 間 試 験

１ 枚 目（4 枚あります）　　2012 年 11 月 27 日出題　10:30〜12:00

学生番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

[1] 以下の問いに答えよ．

(1) $5+i=re^{i\alpha}$ $(r>0,\ \alpha\in\mathbb{R})$ とおくとき，r を求めよ．また，α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{6}$ をみたすようにとれることを示せ．

(2) $(5+i)^4(1-i)$ の極形式を (1) の r（ただし具体的な値は不要）と α を用いて表せ．

(3) $(5+i)^4(1-i)$ を直接計算して問 (2) の結果と比較することにより，以下の等式 $(*)$ を示せ．ただし $\mathrm{Arctan}\,t$ $(t\in\mathbb{R})$ は逆正接函数の主値 $(-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Arctan}\,t<\frac{\pi}{2})$ である．

$$(*)\qquad 4\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5}-\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

[2] 2 次方程式 $z^2-(1+2i)z+1+7i=0$ を解け．

数学 IB： 中 間 試 験

2 枚 目（4 枚あります）　　2012 年 11 月 27 日出題　10:30〜12:00

氏名

---

[3]　写像 $w = z^2$ について考える．

(1) z 平面における虚軸に平行な直線 $\mathrm{Re}\, z = k$ $(k \in \mathbb{R})$ は，w 平面のどんな図形に写されるか．それを図示せよ．

(2) z 平面における領域 $D := \{z \in \mathbb{C}\,;\, 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$ は，w 平面のどんな領域に写されるか．それを図示せよ．

数学 IB： 中 間 試 験

　　2012 年 11 月 27 日出題　10:30〜12:00

氏名

[**4**]　拡張された複素平面上の異なる 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 に対して，その非調和比（複比）(z_1, z_2, z_3, z_4) を次式で定義する．

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$$

(1) 1 次分数変換 $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ （ a, b, c, d は複素数の定数）において，非調和比は保たれること，すなわち $w_j := \dfrac{az_j + b}{cz_j + d}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ とおくとき，次の式が成り立つことを示せ（この小問では，証明は z_j と w_j のすべてが有限なときにのみ与えれば十分とする）．

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

(2) 1 次分数変換で，$z_1 = 0$，$z_2 = 1$，$z_3 = \infty$ をそれぞれ $w_1 = -1$，$w_2 = -i$，$w_3 = 1$ に写すものを求めよ．

数学 IB： 中 間 試 験

　　2012 年 11 月 27 日出題　10:30〜12:00

氏名

---

[5] (1) $u(x,y) := 3x^2y - y^3$ は調和関数であることを示せ．

(2) 問 (1) の $u(x,y)$ を実部に持つ解析函数 $f(z)$ $(z = x + iy)$ の内で，$f(i) = -1 + i$ となるものを求めよ．答えは x, y を用いず，z のみを用いて表すこと．

(3) 円 $|z - 2i| = 2$ を C とする．問 (2) で求めた解析函数 $f(z)$ について，$\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-i}\,dz$ を求めよ．ただし積分は反時計回りとする．