微分積分学 B：期 末 試 験

1 枚 目（4 枚あります）　　2013 年 2 月 1 日出題　10:30〜12:00

学生番号　　　　　　　　　氏名

---

[1] $f(t)$ は 1 変数 t のなめらかな函数とする．3 変数の函数 $u(x,y,z)$ を $u(x,y,z)=f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ で定義するとき，

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=f''(t)+\frac{2}{t}f'(t),\qquad t=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

となることを示せ．

微分積分学 B： 期 末 試 験

　　2013 年 2 月 1 日出題　10:30〜12:00

氏名

---

[2]　2 変数函数 $f(x, y) := (x^2 y - x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2$ に極値があれば，それを求めよ．極大か極小かも判定すること．

微分積分学 B： 期 末 試 験

３ 枚 目（4 枚あります）　　　　2013 年 2 月 1 日出題　10:30〜12:00

氏名

[**3**]　平面曲線 $\Gamma : x^3 + y^3 - 3xy = 0$ について考える．

(1) Γ の特異点を求めよ．

(2) Γ の通常点（正則点ともいう）で，座標軸に平行な接線を持つ点をすべて求めよ．

(3) Γ の漸近線（直線）を求めよ．

(4) 直線 $y = tx$ $(t > 0)$ と Γ の第 1 象限内の交点を考えることで，第 1 象限内の Γ は有界であることを示せ．

微分積分学 B： 期 末 試 験

4 枚 目（最後のページです）　　2013 年 2 月 1 日出題　10:30〜12:00

氏名

[4] (1) $(x, y) = (0, 0)$ の近くで $x + y = \tan(xy)$ から $y = \varphi(x)$ と解けることを，陰函数定理により示せ．

(2) (1) の $\varphi(x)$ の $x \to 0$ のときの挙動を調べよう．

(i) $x \to 0$ のとき，$\arctan x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ であることは，$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^3)$ を積分することからわかる（これは本問では認めるので証明不要）．一方 $\tan x$ が奇函数であり，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ であることから，$x \to 0$ のとき，実数 a を用いて $\tan x = x + ax^3 + o(x^4)$ とおける．これを $\arctan(\tan x) = x$ $\left(|x| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に代入することにより，a を求めよ．

(ii) さらに陰函数定理から，(1) の $\varphi(x)$ は $x = 0$ の近くでなめらかであることが保証され，また $\varphi(0) = 0$ であることから，$x \to 0$ のとき，$\varphi(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4)$ とおける．a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ．

(3) $\varphi^{(4)}(0)$ を求めよ．