微分積分学 **A**：期 末 試 験

1 枚 目（**4** 枚あります）　　2012 年 7 月 27 日出題　10:30〜12:00

学生番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

[1]　$a_1 = \sqrt{2}$，$a_{n+1} := \sqrt{2}^{\,a_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で定まる数列を考える．

(1) $\{a_n\}$ は 2 を一つの上界とする狭義単調増加数列であることを示せ．

　（数列の上界とは，数列の値からなる集合の上界のことである．）

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

微分積分学 A： 期 末 試 験

　　2012 年 7 月 27 日出題　10:30〜12:00

学生番号　　　　　　　　　　　　氏名

[**2**] Leibniz の公式を用いて次式を示せ：

$$(x^3 \sin x)^{(n)} = A_n(x)(\sin x)^{(n)} + B_n(x)(\cos x)^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ここで，多項式 $A_n(x)$，$B_n(x)$ も求めること．

[**3**] $f(x) := \lim_{n\to\infty} \exp \dfrac{-1}{x^2 + \dfrac{1}{n}}$ とする．$k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して次を示せ：

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} Q_k\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x \neq 0), \quad \text{ただし } Q_k(y) \text{ は } 3k \text{ 次の } y \text{ の多項式} \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

微分積分学 **A**： 期 末 試 験

3 枚 目（**4** 枚あります）　　　　2012 年 7 月 27 日出題　10:30〜12:00

学生番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

[4] $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{\log(1+x)}{x}\right)$ を求めよ.

[5] (1) 函数 $f(x) := x^{4/3}\sin\dfrac{1}{x}$ は区間 $I := (\,0,1\,]$ で一様連続であることを示せ.

(2) (1) の函数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は I で有界でないことを示せ.

微分積分学 A： 期 末 試 験

　　2012 年 7 月 27 日出題　10:30〜12:00

学生番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

[6]　実数 x に対して，x を越えない最大の整数を $[\,x\,]$ で表す.

(1) 函数 $f(x) := x - [\,x\,]$ は閉区間 $I := [0, 3]$ で区分連続であるから，教科書によれば積分可能である．定積分 $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の不定積分 $F(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \ (x \in I)$ を求めてグラフをかけ.

(3) 開区間 $(\,0\,, 3\,)$ での f の不連続点における F の微分可能性について調べよ.