数学 IB：期 末 試 験

１ 枚 目（**4** 枚あります）　　　　2012 年 2 月 7 日出題　10:30〜12:00

学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

[**1**]　(1) x, y が実数であるとき，$|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$ であることを示せ．
(2) 複素変数の函数としての $\sin z$ の零点とその位数をすべて求めよ．
(3) 複素数の列 $\{z_n\}$ で，$|\sin z_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$ となるものを一つ例として挙げよ．

数学 IB： 期 末 試 験

２ 枚 目（4 枚あります）　　　2012 年 2 月 7 日出題　10:30〜12:00

学生番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

[**2**]　C は単位円周を表し，積分は反時計回りとする．次の各積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{\sin z}$　　(2) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{\sin^2 z}$　　(3) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_C \sin\frac{1}{z}\,dz$

数学 IB： 期 末 試 験

 2012 年 2 月 7 日出題　10:30〜12:00

学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

[3] (1) ベキ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ の収束半径は 1 であることを示せ.

(2) (1) のベキ級数の和を求めよ.

(3) ベキ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ $(|z| < 1)$ の和を求めよ.

数学 IB： 期 末 試 験

　2012 年 2 月 7 日出題　10:30〜12:00

学生番号　　　　　　　　　　　　　氏名

---

[4] (1) 函数 $\dfrac{1}{1+z}$ を $z = e^{i\theta}$（ただし $|\theta| < \pi$ とする）を中心として Taylor 級数に展開せよ．

(2) 以下の下線部について，(i), (ii) の問に答えよ．

> $|\theta| < \pi$ とする．このとき，<u>$\mathrm{Re}(1+e^{i\theta}) > 0$</u> となるから，<u>$\delta > 0$ を十分小さくとれば</u>，$|z - e^{i\theta}| < \delta$ をみたすすべての $z \in \mathbb{C}$ に対して，$|\,\mathrm{Arg}(1+z)| < \pi$ となる．従って，円の内部 $|z - e^{i\theta}| < \delta$ において，$\mathrm{Log}(1+z)$ が定義できる（Log は主値を表す）．

(i) 下線部の $\mathrm{Re}(1+e^{i\theta}) > 0$ を証明せよ．

(ii) どの位 $\delta > 0$ を小さくとればよいか（小ささは θ に依存する），一つの十分条件を与えよ．ここで，複素数 $w \in \mathbb{C}$ が $\mathrm{Re}\,w > 0$ であるならば，$|\,\mathrm{Arg}\,w| < \frac{\pi}{2}$ をみたすことに注意せよ．

(3) $|\theta| < \pi$ とする．(2) より $\mathrm{Log}(1+z)$ は $z = e^{i\theta}$ で解析的である．$\mathrm{Log}(1+z)$ を $z = e^{i\theta}$ を中心とする Taylor 級数に展開せよ．ただし，結果における $\mathrm{Log}(1+e^{i\theta})$ という表示はそのままでよい．