数学 IB：中 間 試 験

1 枚 目（4 枚あります）　　2011 年 11 月 21 日出題　10:30〜12:00

学生番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

[1]　(1) $w^2 = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ -\pi < \theta \leqq \pi)$ をみたす複素数 w を，$re^{i\theta} = (\sqrt{r}\,e^{i\theta/2})^2$ と見て，$w^2 - re^{i\theta}$ を因数分解することにより求めよ．
(2) $w^2 = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ をみたす複素数 w は次式で与えられることを示せ．

$$w = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + i(\operatorname{sgn} y)\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right) \qquad (z = x + iy)$$

ただし実数 y に対して，$\operatorname{sgn} y$ は，$y \neq 0$ のときは y の符号とし，$\operatorname{sgn} 0 = 0$ とする．
(3) 2 次方程式 $z^2 + 2(\sqrt{3} - i)z - 2(3 + 5\sqrt{3}\,i) = 0$ を解け．

数学 IB： 中 間 試 験

2 枚 目（4 枚あります）　　2011 年 11 月 21 日出題　10:30〜12:00

学生番号　　氏名

[**2**]　写像 $w = z^2$ について考える．

(1) z 平面における実軸に平行な直線 $\mathrm{Im}\, z = k$（$k \in \mathbb{R}$ は定数）は，w 平面のどんな図形に写されるか．それを図示せよ．

(2) z 平面における領域 $D := \{z \in \mathbb{C}\,;\ 0 < \mathrm{Im}\, z < 1\}$ の像を求めて図示せよ．

数学 IB： 中 間 試 験

３ 枚 目（**4** 枚あります）　　2011 年 11 月 21 日出題　10:30〜12:00

学生番号　　　　　　　　　氏名

[**3**] 拡張された複素平面上の異なる 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 に対して，その非調和比（複比）(z_1, z_2, z_3, z_4) を次式で定義する．

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$$

(1) 1 次分数変換 $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ （ a, b, c, d は複素数の定数）において，非調和比は保たれること，すなわち $w_j := z_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ とおくとき，次の式が成り立つことを示せ.（この小問では，証明は z_j と w_j のすべてが有限なときにのみ与えれば十分とする.）

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

(2) 1 次分数変換で，$z_1 = 0$，$z_2 = 1$，$z_3 = \infty$ をそれぞれ $w_1 = -1$，$w_2 = -i$，$w_3 = 1$ に写すものを求めよ.

数学 IB： 中 間 試 験

４ 枚 目（**4** 枚あります）　　2011 年 11 月 21 日出題　10:30〜12:00

学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

---

[4]　(1) $u(x,y) := x^3 - 3xy^2$ は調和関数であることを示せ．
(2) 問 (1) の $u(x,y)$ を実部に持つ解析函数 $f(z)$ の内で，$f(1) = 1 + i$ となるものを求めよ．
(3) C を円 $|z-2| = 2$ とする．問 (2) で求めた解析函数 $f(z)$ について，$\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-1}\, dz$ を求めよ．
ただし積分は反時計回りとする．