微分積分学 B ： 中 間 試 験

１ 枚 目（４枚あります）　　2010 年 12 月 7 日出題

学生番号　　　　　　　　　　氏名

[**1**] 定積分 $I := \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + a\cos x}$ を考える．ただし $0 < a < 1$ とする．

(1) $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくとき，$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$ であることを示せ．

(2) I を計算せよ．

微分積分学 B： 中 間 試 験

２ 枚 目（４枚あります）　2010 年 12 月 7 日出題

学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

[**2**]　Asteroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ を考える．ただし $a > 0$ は定数とする．

(1) この曲線で囲まれる図形の面積は $2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \, dt$ に等しい事を示せ（本問ではこれ以上は計算を進めないことにする）．

(2) この曲線の全長を求めよ．

微分積分学 B ： 中 間 試 験

 2010 年 12 月 7 日出題

学生番号 氏名

[**3**] 次で定義される函数 $f(x)$ を考える：

$$f(x,y) := \begin{cases} x^2 \tan^{-1}\dfrac{y}{x} - y^2 \tan^{-1}\dfrac{x}{y} & (xy \neq 0) \\ 0 & (xy = 0) \end{cases}$$

(1) $f_x(0,y) = -y$，$f_y(x,0) = x$ であることを示せ.
(2) $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ であることを示せ.

微分積分学 B ： 中 間 試 験

４ 枚 目（最終ページ） 2010 年 12 月 7 日出題

学生番号 氏名

[**4**] C^2 函数 $z = f(x, y)$ を $x = au + bv$，$y = bu + av$（a, b は定数で $a^2 - b^2 = 1$ をみたす）によって u, v に変数を変換するとき，次の式を示せ.

(1) $(z_u)^2 - (z_v)^2 = (z_x)^2 - (z_y)^2$.
(2) $z_{uu} - z_{vv} = z_{xx} - z_{yy}$.