数学特論8（学部） 表現論大意（大学院） レポート問題

出題：2010年7月22日 （担当：野村隆昭）

＊小問のすべてに解答すること.
＊A4 レポート用紙にて数理事務室に提出のこと.

提出期限：2009年8月20日(金) 17時　厳守

[**1**] 以下では，$\mathbb{R}^{n+1}$ を縦ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ の空間と見る．$\mathbb{R}^{n+1}$ の標準内積を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ で表す．そして，$\mathbb{R}^{n+1}$ に 3 項積 $\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}$ を次で定義する：

$$\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\} := \frac{1}{2}\big((\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{z} + (\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}\big).$$

(1) この 3 項積によって，$\mathbb{R}^{n+1}$ は Jordan triple system （以下 JTS と書く）になることを示せ．この JTS を V と書くことにする．

(2) V は正定値な JTS であることを示せ．実際，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{x}\,\square\,\boldsymbol{y})$ は $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ の正の定数倍になることを示せ．

(3) $\{\boldsymbol{c}\in V\,;\,\boldsymbol{c}$ は non-zero tripotent$\} = \{\boldsymbol{c}\in V\,;\,\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=1\}$ を示せ．

(4) $\boldsymbol{c}\neq 0$ を non-zero tripotent とする．$\boldsymbol{c}$ に関する V の Peirce 分解を記述せよ．結果として，特に $\boldsymbol{c}$ は極大 tripotent であることに注意せよ．

(5) V の元 $\boldsymbol{x}\neq 0$ のスペクトル分解はどうなるか．

(6) V の自己同型群 $\mathrm{Aut}(V)$ は，$n+1$ 次直交群 $O(n+1)$ であることを示せ．

(7) V の構造群 $\mathrm{Str}(V)$ を

$$\mathrm{Str}(V) := \{g\in GL(n+1,\mathbb{R})\,;\, g(\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}) = \{g\boldsymbol{x}, {}^t g^{-1}\boldsymbol{y}, g\boldsymbol{z}\}\quad (\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V)\}$$

で定義すると，$\mathrm{Str}(V) = GL(n+1,\mathbb{R})$ となることを示せ．

(8) $\boldsymbol{e}_0\in V$ は第0成分のみ 1 で，他の成分は 0 である縦ベクトルとする．すなわち

$${}^t\boldsymbol{e}_0 = (1,0,\dots,0).$$

極大 tripotent $\boldsymbol{e}_0$ に付随する実 Siegel 領域 D は次のように記述されることを示せ：

$$D = \{\boldsymbol{x}\in V\,;\, x_0 > x_1^2+\cdots+x_n^2\}.$$

また D は適当な affine 変換の群で等質な領域になっていることを示せ．