Faculty of Mathematics
Kyushu University

Faculté de Mathématiques
Université de Kyushu

数 学 特 論 講 義 ノ ー ト

(2010 年度前期)

Jordan Triple Systems

野 村 隆 昭

目　　　　次

§1.	Introduction	1
§2.	Jordan Triple System	5
§3.	Peirce 分解	10
§4.	スペクトル分解	15
§5.	JTS frames	20
§6.	Jordan 代数と JTS	25
§7.	JTS と Jordan 代数の表現	31
§8.	JTS と実 Siegel 領域	36
§9.	多項式写像のなす Lie 代数	42
§10.	Koecher–Tits の Lie 代数	48
§11.	Derivations	53
§12.	スペクトルノルム	57

§1. Introduction

まず最初に，有界対称領域の研究に3項積が自然に現れる様子を例で見よう．$V := \mathrm{Mat}(p \times q, \mathbb{C})$ を複素 $p \times q$ 行列のなす複素ベクトル空間とする．V の各元 v を自然に線型写像 $\mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^p$ （共に縦ベクトルの空間）と見る：

$$v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1q} \\ \vdots & & & \vdots \\ v_{p1} & v_{p2} & \cdots & v_{pq} \end{pmatrix} : \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^p$$

このときの v の作用素ノルムを $\|v\|$ とする：$\|v\| := \sup_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi \in \mathbb{C}^q}} \|v\xi\|_{\mathbb{C}^p}$．有限次元空間なので，右辺の sup は実際には max である．

さて次で与えられる V の有界対称[1]領域

$$\mathcal{D} := \{z \in V\ ;\ I_p - zz^* \gg 0\} \qquad (I_p \text{ は } p \text{ 次単位行列}) \tag{1.1}$$

を考える．条件は，Hermite 行列 $I_p - zz^*$ が正定値であること．従って，半正定値行列 zz^* の固有値がすべて 1 より小さいことである．あとのために次の補題を述べておこう：

補題 1.1. $z \in V$ に対して

$$I_p - zz^* \gg 0 \iff I_q - z^*z \gg 0 \iff \|z\| < 1.$$

証明. すでに述べたように

$$\begin{aligned} I_p - zz^* \gg 0 &\iff \text{半正定値行列 } zz^* \text{ の固有値はすべて } 1 \text{ より小さい} \\ &\iff \|zz^*\| < 1. \end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned} \|zz^*\| &= \text{半正定値行列 } zz^* \text{ の最大固有値} \\ &= \sup_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi \in \mathbb{C}^p}} \left|(zz^*\xi \,|\, \xi)_{\mathbb{C}^p}\right| = \sup_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi \in \mathbb{C}^p}} \|z^*\xi\|^2 \\ &= \|z^*\|^2 \end{aligned}$$

であるから，$\|zz^*\| < 1 \iff \|z^*\| < 1$．そして $\|z^*\| = \|z\|$ であるから，上の議論で z^* と z を入れ替えて逆に辿ることができて，

$$\|zz^*\| < 1 \iff \|z^*z\| < 1 \iff I_q - z^*z \gg 0$$

となって証明が終わる． □

[1] ここでは「対称」という言葉は気にしないでよい．

(1.1) の $\mathcal{D}$ で話を続けよう．

$$I_{p,q} := \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

とおき，$\mathbb{C}^{p+q}$ 上の sesqui-linear form ${}^t\zeta I_{p,q}\overline{\zeta'}$ を考える．正則行列 $g \in GL(p+q, \mathbb{C})$ でこの sesqui-linear form を不変にするもの全体を $U(p,q)$ で表す（群をなしている）．

$$g \in U(p,q) \iff {}^t(g\zeta) I_{p,q} (\overline{g\zeta'}) \qquad (\text{for } \forall \zeta, \zeta' \in \mathbb{C}^{p+q})$$

であるから

$$g \in U(p,q) \iff {}^t g I_{p,q} \overline{g} = I_{p,q} \iff g^* I_{p,q} g = I_{p,q}.$$

行列 g を区分けして

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad (a \text{ は } p \times p,\ b \text{ は } p \times q \text{ etc.})$$

とおくとき，

$$g \in U(p,q) \iff \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

簡単な計算で

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(p,q) \iff \begin{cases} a^*a - c^*c = I_p, \\ a^*b = c^*d, \\ d^*d - b^*b = I_q. \end{cases} \tag{1.2}$$

補題 1.2. $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(p,q)$ かつ $z \in \mathcal{D}$ のとき，$cz+d$ は可逆である．

証明． 次の式を導こう：$\xi \in \mathbb{C}^q$ のとき，

$$\|(cz+d)\xi\|^2 = \|(az+b)\xi\|^2 + ((I_q - z^*z)\xi \,|\, \xi). \tag{1.3}$$

そうすると，この式から

$$(cz+d)\xi = 0 \implies ((I_q - z^*z)\xi \,|\, \xi) = 0$$

が出て，$I_q - z^*z \gg 0$ より $\xi = 0$ がいえるので，$cz+d$ は可逆ということになる．

(1.3) の証明は次の通り：まず

$$\|(cz+d)\xi\|^2 = ((z^*c^* + d^*)(cz+d)\xi \,|\, \xi).$$

ここで (1.2) を用いると

$$\begin{aligned}(z^*c^*+d^*)(cz+d) &= z^*c^*cz+z^*c^*d+d^*cz+d^*d\\ &= z^*(a^*a-I_p)z+z^*a^*b+b^*az+I_q+b^*b\\ &= (z^*a^*+b^*)(az+b)-z^*z+I_q.\end{aligned}$$

これより (1.3) が直ちに出る． □

さて，群 $U(p,q)$ は (1.1) の $\mathcal{D}$ に次で作用する：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot z=(az+b)(cz+d)^{-1}. \tag{1.4}$$

実際に $z\in\mathcal{D}$ のときに，この右辺が $\mathcal{D}$ に属することを見てみよう．補題 1.1 より，$\|z\|<1$ のときに，$\|(az+b)(cz+d)^{-1}\|<1$ を示せばよい．(1.3) において，ξ の代わりに $(cz+d)^{-1}\xi$ とおくと，$\xi':=(cz+d)^{-1}\xi$ として

$$\|\xi\|^2=\|(az+b)(cz+d)^{-1}\xi\|^2+((I_q-z^*z)\xi'\,|\,\xi')\geqq\|(az+b)(cz+d)^{-1}\xi\|^2. \tag{1.5}$$

これより，$\|(az+b)(cz+d)^{-1}\|\leqq 1$ が出る．ここで $\|(az+b)(cz+d)^{-1}\|=1$ ならば，単位ベクトル $\xi_0\in\mathbb{C}^q$ が存在して，$\|(az+b)(cz+d)^{-1}\xi_0\|=1$ となる．そうすると，(1.5) の不等号が等号になるので，$\xi_0':=(cz+d)^{-1}\xi_0$ として，$((I_q-z^*z)\xi_0'\,|\,\xi_0')=0$ を得る．$I_q-z^*z\gg 0$ より $\xi_0'=0$，従って $\xi_0=0$ という矛盾を得る． □

そして (1.4) が作用になっていることは容易に確かめられる：

(1) $g_1g_2\cdot z=g_1\cdot(g_2\cdot z)$,

(2) $e\cdot z=z$（$e:=I_{p+q}\in U(p,q)$ は単位元）.

さて，$\mathfrak{u}(p,q):=\operatorname{Lie}U(p,q)$ を $U(p,q)$ の Lie 代数とする．

$$X\in\operatorname{Mat}(p+q,\mathbb{C})\text{ が }\mathfrak{u}(p,q)\text{ に属する}\iff\exp tX\in U(p,q)\quad(\forall t\in\mathbb{R})$$

より，

$$X\in\mathfrak{u}(p,q)\in\mathfrak{u}(p,q)\iff X^*I_{p,q}+I_{p,q}X=0.$$

$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくとき，簡単な計算により

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathfrak{u}(p,q)\iff\begin{cases}a^*=-a,\\ c=b^*,\\ d^*=-d.\end{cases}$$

従って

$$\mathfrak{k} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \;;\; a, b \text{ は skew-Hermitian} \right\},$$
$$\mathfrak{p} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v \\ v^* & 0 \end{pmatrix} \;;\; v \in V \right\}$$

とおくと，$\mathfrak{u}(p,q) = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ である．$\mathfrak{u}(p,q)$ の元は $\mathcal{D}$ 上の正則ベクトル場を定義している．実際 $t \in \mathbb{R}$ として

$$\exp t \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp ta & 0 \\ 0 & \exp tb \end{pmatrix}$$

より

$$\left[\exp t \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right] \cdot z = (\exp ta) z (\exp tb)^{-1}$$

であるから，$t = 0$ で微分して

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot z = az - zb.$$

また

$$\exp t \begin{pmatrix} 0 & v \\ v^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + O(t^2) & tv + O(t^3) \\ tv^* + O(t^3) & 1 + O(t^2) \end{pmatrix}$$

であるから，$|t|$ が十分小さいとき

$$\begin{aligned} \left[\exp t \begin{pmatrix} 0 & v \\ v^* & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot z &= \big(z + tv + O(t^2)\big)\big(1 + tv^* z + O(t^2)\big)^{-1} \\ &= \big(z + tv + O(t^2)\big)\big(1 - tv^* z + O(t^2)\big) \\ &= z + t(v - zv^* z) + O(t^2). \end{aligned}$$

$t = 0$ で微分して

$$\begin{pmatrix} 0 & v \\ v^* & 0 \end{pmatrix} \cdot z = v - zv^* z.$$

$Q(z)v := zv^*z$ とおくと，z については斉次 2 次（従って，$\forall z \in V$ で意味を持つ），v に関しては反正則である．2 次の部分を polarize して

$$Q(x,z) := \frac{1}{2}\big(Q(x+z) - Q(x) - Q(z)\big) \tag{1.6}$$

とおくと

$$Q(x,z)v = \frac{1}{2}(xv^*z + zv^*x).$$

以上のようにして，$V = \mathrm{Mat}(p \times q, \mathbb{C})$ に 3 項積が現れる．

一般に，$V \equiv \mathbb{C}^N$ の円形な有界対称領域を $\mathcal{D}$ とする．ここで $\mathcal{D}$ が円形であるとは，$0 \in \mathcal{D}$ であり，$z \in \mathcal{D}$ のとき，$\forall \theta \in \mathbb{R}$ に対して $e^{i\theta} z \in \mathcal{D}$ となることである．

$G := \mathrm{Hol}(\mathcal{D})^\circ$ を，$\mathcal{D}$ の正則同相写像全体のなす Lie 群の単位元の連結成分とする．G は中心が trivial の半単純 Lie 群である．G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とする．$\mathfrak{g}$ の元は $\mathcal{D}$ 上の正則ベクトル場である．K を G における原点 0 の固定部分群とする：$K := \{g \in G\ ;\ g \cdot 0 = 0\}$．$K$ は G の極大コンパクト群である．$\mathfrak{k} := \mathrm{Lie}(K)$（$K$ の Lie 代数）とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解とする．$\mathcal{D} \cong G/K$ より，$\mathfrak{p} \ni X \mapsto X(0) \in V$ は実線型同型であるので，その逆写像を $V \ni v \mapsto X_v \in \mathfrak{p}$ とする．先の例では，$\mathfrak{p} \ni \begin{pmatrix} 0 & v \\ v^* & 0 \end{pmatrix} \mapsto v \in V$，あるいはベクトル場 $z \mapsto z - zv^*z$ と $v \in V$ との間の実線型同型写像のことである．

命題 1.3. $v - X_v(z)$ は z に関して 2 次斉次（従って $\forall z \in V$ で意味を持つ），かつ v に関して反線型.

従って，$v - X_v(z) = Q(z)v$ とおき，$Q(x,z)$ を (1.6) で定義すると，V での 3 項積が次で定義できることになる：

$$\{x,y,z\} := Q(x,z)y.$$

§2. Jordan Triple System

以下 V は $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) 上のベクトル空間とする（当面は無限次元でも可）.
定義. V に 3 項積と呼ばれる 3 重線型写像 $\{\cdot,\cdot,\cdot\} : V \times V \times V \to V$ が与えられていて，次の (1), (2) が任意の $x,y,z,a,b \in V$ に対してみたされているとする：
(1) $\{x,y,z\} = \{z,y,x\}$,
(2) $\{a,b,\{x,y,z\}\} = \{\{a,b,x\},y,z\} - \{x,\{b,a,y\},z\} + \{x,y,\{a,b,z\}\}$.
このとき，対 $(V, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$（あるいは単に V）を **Jordan triple system**（略して **JTS**）という．また (2) を **JT identity** と呼ぶ.

例 2.1. $V := \mathrm{Mat}(p \times q, \mathbb{R})$ とし，V に次で 3 項積を定義する：

$$\{x,y,z\} := \frac{1}{2}(x{}^tyz + z{}^tyx).$$

JTS の定義における (1) は明らかである．(2) の検証は演習：両辺とも次式に等しい：

$$\frac{1}{4}(a{}^tbx{}^tyz + a{}^tbz{}^tyx + x{}^tyz{}^tba + z{}^tyx{}^tba).$$

以下 V を JTS とする．各 $x,y\in V$ に対して，次の 2 種類の V 上の線型作用素を導入する：

$$(x\,\Box\,y):z\mapsto\{x,y,z\},\qquad P(x,y):z\mapsto\{x,z,y\}.$$

明らかに，$x\,\Box\,y$ も $P(x,y)$ も x,y に双線型に依存する．さらに簡単のため，$P(x):=P(x,x)$ と書くことにする．JT identity は線型作用素の等式として次のように書けることに注意しておく：

$$[a\,\Box\,b,x\,\Box\,y]=\big((a\,\Box\,b)x\big)\,\Box\,y-x\,\Box\,\big((b\,\Box\,a)y\big).$$

ただし，作用素 A,B に対して，$[A,B]:=AB-BA$ である．

命題 2.2. $a,x\in V$ とする．

(1) $P(a)(x\,\Box\,a)=P\big(P(a)x,a\big)=(a\,\Box\,x)P(a)$.

(2) $(P(x)a)\,\Box\,a=x\,\Box\,(P(a)x)=2(x\,\Box\,a)^2-P(x)P(a)$.

証明. $y\in V$ とするとき

$$\begin{aligned}P\big(P(a)x,a\big)y&=\{P(a)x,y,a\}=\{\{a,x,a\},y,a\}=\{a,y,\{a,x,a\}\}\\&=\{\{a,y,a\},x,a\}-\{a,\{y,a,x\},a\}+\{a,x,\{a,y,a\}\}\end{aligned}$$

(2.1) (by JT identity)

$$\begin{aligned}&=2\{a,x,\{a,y,a\}\}-\{a,\{y,a,x\},a\}\\&=2(a\,\Box\,x)P(a)y-P(a)(x\,\Box\,a)y.\end{aligned}$$

ここで最後の項 $P(a)(x\,\Box\,a)y$ は x,y に関して対称であるから，残りの $P\big(P(a)x,a\big)y-2(a\,\Box\,x)P(a)y$ も x,y に関して対称である．ゆえに

$$\begin{aligned}P\big(P(a)x,a\big)y-2(a\,\Box\,x)P(a)y&=P\big(P(a)y,a\big)x-2(a\,\Box\,y)P(a)x\\&=\{P(a)y,x,a\}-2\{a,y,P(a)x\}\\&=(a\,\Box\,x)P(a)y-2P\big(P(a)x,a\big)y.\end{aligned}$$

移項して 3 で割ると，$P\big(P(a)x,a\big)=(a\,\Box\,x)P(a)$ を得る．この等式を (2.1) に代入すると $P\big(P(a)x,a\big)=P(a)(x\,\Box\,a)$ を得る．

(2) $y\in V$ として

$$\begin{aligned}\big((P(x)a)\,\Box\,a\big)y&=\{\{x,a,x\},a,y\}=\{y,a,\{x,a,x\}\}\\&=\{\{y,a,x\},a,x\}-\{x,\{a,y,a\},x\}+\{x,a,\{y,a,x\}\}\\&=2(x\,\Box\,a)^2-P(x)P(a)y.\end{aligned}$$

また

$$\bigl(x\,\square\,P(a)x\bigr)y=\{x,\{a,x,a\},y\}$$
$$=-\{x,a,\{x,a,y\}\}+\{\{x,a,x\},a,y\}+\{x,a,\{x,a,y\}\}$$
$$=\bigl(P(x)a\,\square\,a\bigr)y$$

となって証明が終わる． □

定義． 元 $x\in V$ の奇数乗を次で帰納的に定義する：

$$x^1:=x,\qquad x^{2k+1}:=(x\,\square\,x)x^{2k-1}\ \ (k=1,2,\dots).$$

特に $x^3=\{x,x,x\}=P(x)x$ であるが，命題 2.2 (1) よりわかる

$$[x\,\square\,x,\ P(x)]=0 \tag{2.2}$$

を用いることで，次の演習が帰納法で簡単に証明できる．

演習：$x\in V$ のとき，$x^{2k+1}=P(x)^kx$ $(k=0,1,2,\dots)$．

命題 2.3． $x\in V$ のとき，$x^p\,\square\,x^q$（p,q は正奇数）は，$p+q=m$ のみに依存する．すなわち，$m=2n$ が偶数のとき

$$x^{2n-1}\,\square\,x=x^{2n-3}\,\square\,x^3=\cdots=x\,\square\,x^{2n-1}.$$

まず次の補題から示そう．

補題 2.4． $x\in V$ のとき，$[x^{2k+1}\,\square\,x,\ x\,\square\,x]=0$ $(k=0,1,2,\dots)$．

証明． $k=0$ のときは trivial．$k=1$ のときを示すために，命題 2.2 (2) で $a=x$ とおくと，

$$x^3\,\square\,x=2(x\,\square\,x)^2-P(x)^2.$$

ゆえに (2.2) より，$[x^3\,\square\,x,\ x\,\square\,x]=0$ である．

さて $k\geqq 2$ とし，$x^{2k-3}\,\square\,x$ と $x^{2k-1}\,\square\,x$ が $x\,\square\,x$ と可換であると仮定する．このとき，命題 2.2 (2) で，x の代わりに $x+y$ $(y\in V)$ とおくと

$$\bigl(P(x+y)a\bigr)\,\square\,a=2(x\,\square\,a+y\,\square\,a)^2-P(x+y)P(a).$$

$P(x+y)=P(x)+2P(x,y)+P(y)$ に注意すると

$$\bigl(P(x,y)a\bigr)\,\square\,a=(x\,\square\,a)(y\,\square\,a)+(y\,\square\,a)(x\,\square\,a)-P(x,y)P(a) \tag{2.3}$$

を得る．ここで $y=x^{2k-1}$, $a=x$ とおくと，左辺は $x^{2k+1}\,\square\,x$ に等しい．一方，右辺は

$$(x\,\square\,x)(x^{2k-1}\,\square\,x)+(x^{2k-1}\,\square\,x)(x\,\square\,x)-P(x^{2k-1},x)P(x)$$

に等しい．最後の項について，演習と命題 2.2 (1) より（a を x とし，x を x^{2k-3} とする）

$$P(x^{2k-1},\,x)P(x)=P\big(P(x)x^{2k-3},\,x\big)P(x)=P(x)(x^{2k-3}\,\square\,x).$$

ゆえに (2.3) は

$$x^{2k+1}\,\square\,x=(x\,\square\,x)(x^{2k-1}\,\square\,x)+(x^{2k-1}\,\square\,x)(x\,\square\,x)-P(x)(x^{2k-3}\,\square\,x)P(x)$$

となって，帰納法の仮定と (2.2) により，$x\,\square\,x$ と可換である． □

命題 2.3 の証明． $n=1$ のとき，証明すべき事は何もない．n のとき命題が成り立つと仮定する．すなわち

$$x^p\,\square\,x^{2n-p}=x^{2n-1}\,\square\,x \qquad (p=1,3,\ldots,2n-1)$$

が成り立つと仮定する．このとき，この仮定と補題から，$p=1,3,\ldots,2n-1$ に対して

$$\begin{aligned}0&=[x\,\square\,x,\,x^p\,\square\,x^{2n-p}]=\big((x\,\square\,x)x^p\big)\,\square\,x^{2n-p}-x^p\,\square\,\big((x\,\square\,x)x^{2n-p}\big)\\&=x^{p+2}\,\square\,x^{2n-p}-x^p\,\square\,x^{2(n+1)-p}.\end{aligned}$$

これは $x^p\,\square\,x^{2(n+1)-p}=x^{2(n+1)-1}\,\square\,x$ $(p=1,3,\ldots,2n+1)$ を意味するから証明終わり． □

Algebra のときはべき等元 (idempotent) が重要な働きをするが，3 項積においては，tripotent がその代わりをする．

定義． $c\in V$ が **tripotent** であるとは，$c^3=c$ が成り立つとき．

例 2.5． $V:=\mathrm{Mat}(p\times q,\mathbb{R})$ とする．典型的な tripotent として $c=E_{ij}$（(i,j) 行列単位）がある．実際

$$c^3=E_{ij}{}^tE_{ij}E_{ij}=E_{ij}E_{ji}E_{ij}=E_{ij}.$$

V の各元を，自然に線型写像 $\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^p$ と見よう．$\mathbb{R}^q$ の自然な基底を $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_q$，$\mathbb{R}^p$ の自然な基底を $\boldsymbol{f}_1,\ldots,\boldsymbol{f}_p$ とする．いずれもただ一つの成分のみ 1，他の成分は 0 であるような縦ベクトルである．

$$E_{ij}\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{f}_i, \qquad E_{ij}\boldsymbol{e}_k=0\ \ (k\neq j)$$

であるから，$E_{ij} : \mathbb{R}\boldsymbol{e}_j \to \mathbb{R}\boldsymbol{f}_i$ は等長写像であり，$(\mathbb{R}\boldsymbol{e}_j)^{\perp}$ 上では零写像である．

線型写像 $T : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ が部分的等長写像 (**partial isometry**) であるとは，$\mathbb{R}^q$ の部分空間 E と，$\mathbb{R}^p$ の部分空間 F が存在して，T は E から F の上への等長写像であり，$E^{\perp}$ 上では T は零写像になることである．E のことを T の始空間，F のことを T の終空間という．先の説明から，E_{ij} は $\mathbb{R}\boldsymbol{e}_j$ を始空間とし，$\mathbb{R}\boldsymbol{f}_i$ を終空間とする partial isometry である．

さてこの例では一般に

$$T \in V \text{ が tripotent } \iff T \text{ は部分的等長写像.}$$

証明．　まず $T \in V$ が tripotent であるとしよう．このとき，$T{}^tTT = T$ である．$P := T{}^tT$，$Q := {}^tTT$ とおくと，$P : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$，$Q : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ であって，${}^tP = P$，${}^tQ = Q$ をみたす．さらに

$$P^2 = T{}^tTT{}^tT = T{}^tT = P, \qquad Q^2 = {}^tTT{}^tTT = {}^tTT = Q.$$

以上より，P, Q は直交射影作用素である．$E := Q(\mathbb{R}^q)$，$F := P(\mathbb{R}^p)$ とおく．$T = PT$ かつ $P = T{}^tT$ より，$T(\mathbb{R}^q) = F$ であり，$x \in E$ のとき，

$$\|Tx\|^2 = \langle\, Tx \,|\, Tx \,\rangle = \langle\, {}^tTTx \,|\, x \,\rangle = \langle\, Qx \,|\, x \,\rangle = \langle\, x \,|\, x \,\rangle = \|x\|^2$$

より，$T : E \to F$ は上への等長写像である．さらに $T = TQ$ より，T は $E^{\perp}$ 上零写像である．

逆に T が partial isometry であるとき，$E \subset \mathbb{R}^q$，$F \subset \mathbb{R}^p$ をそれぞれ T の始空間と終空間とする．また E への直交射影作用素を Q とする．任意の $x \in \mathbb{R}^q$ を $x = x_0 + x'$ $(x_0 \in E, x' \in E^{\perp})$ と表すと，$x_0 = Qx$ であり，$Tx' = 0$ より $Tx = Tx_0 = TQx$ である．そうすると

$$\langle\, {}^tTTx \,|\, x \,\rangle = \|Tx\|^2 = \|Tx_0\|^2 = \|x_0\|^2 = \|Qx\|^2 = \langle\, Qx \,|\, x \,\rangle.$$

x の代わりに $x + y$ $(y \in \mathbb{R}^q)$ とおいて整理すると，$\langle\, {}^tTTx \,|\, y \,\rangle = \langle\, Qx \,|\, y \,\rangle$ を得る．ゆえに $Q = {}^tTT$ であって，$T{}^tTT = TQ = T$ となって，T は tripotent である．

§3. Peirce 分解

以下 $(V, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ を JTS とし，$\dim V < \infty$ を仮定する．

補題 3.1. $c \in V$ を tripotent とする．
(1) $P(c)^3 = P(c)$.
(2) 作用素 $c \,\square\, c$ の固有値は高々 $0, \frac{1}{2}, 1$ である．

証明． 命題 2.2 より

$$\begin{cases} P(c)(c\,\square\, c) = P(c) = (c\,\square\, c)P(c) & \cdots \text{(a)} \\ c\,\square\, c = 2(c\,\square\, c)^2 - P(c)^2 & \cdots \text{(b)} \end{cases}$$

(1) 等式 (b) に右から $P(c)$ をかけると

$$P(c)^3 = 2(c\,\square\, c)^2 P(c) - (c\,\square\, c)P(c) \overset{\text{(a)}}{=} P(c).$$

(2) 等式 (b) に右から $c\,\square\, c$ をかけると

$$\begin{aligned} (c\,\square\, c)^2 &= 2(c\,\square\, c)^3 - P(c)^2(c\,\square\, c) \overset{\text{(a)}}{=} 2(c\,\square\, c)^3 - P(c)^2 \\ &\overset{\text{(b)}}{=} 2(c\,\square\, c)^3 - 2(c\,\square\, c)^2 + c\,\square\, c. \end{aligned}$$

ゆえに $2(c\,\square\, c)^3 - 3(c\,\square\, c)^2 + c\,\square\, c = 0$．左辺を因数分解すれば

$$(c\,\square\, c)\big(2c\,\square\, c - I\big)\big(c\,\square\, c - I\big) = 0$$

を得る．これより (2) の主張が出る． □

以下，tripotent c に対して，$c\,\square\, c$ の k 固有空間を $V_k(c)$ $(k = 0, \frac{1}{2}, 1)$ で表す：

$$V_k(c) := V(c\,\square\, c,\, k) \qquad \big(V_k(x) = \{0\} \text{ も許す}\big).$$

$V_k(c)$ のことを，tripotent c に関する **Peirce k 空間**と呼ぶ．また

$$V = V_0(c) + V_{\frac{1}{2}}(c) + V_1(c)$$

を，tripotent c に関する V の **Peirce 分解**と呼ぶ．

例 3.2. $V = \mathrm{Mat}(p \times q, \mathbb{R})$ で考える．$1 \leqq k \leqq \min(p, q)$ をみたす k を一つ固定して $c := E_{11} + \cdots + E_{kk}$ とおく（E_{jj} は (j, j) 行列単位）．明らかに c は tripotent で

ある．このときの Peirce 空間はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
V_1(c) &= \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Mat}(k\times k,\mathbb{R}) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \\
V_{\frac{1}{2}}(c) &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{Mat}(k\times (q-k),\,\mathbb{R}) \\ \hline \mathrm{Mat}((p-k)\times k,\,\mathbb{R}) & 0 \end{array}\right), \\
V_0(c) &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Mat}((p-k)\times (q-k),\mathbb{R}) \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

話を一般の JTS に戻そう．JT identity から，Peirce 空間どうしの次の乗積ルールがわかる：$m \neq 0, \frac{1}{2}, 1$ のとき，$V_m(c) = \{0\}$ と約束して

$$\{V_i(c), V_j(c), V_k(c)\} \subset V_{i-j+k}(c). \tag{3.1}$$

系 **3.3.** c を tripotent とする．

(1) $P(c)\big|_{V_0(c)+V_{1/2}(c)} = 0$.

(2) $P(c)$ は $V_1(c)$ 上 involutive である：$\left(P(c)\big|_{V_1(c)}\right)^2 = \mathrm{Id}_{V_1(c)}$.

証明． (1) 補題の証明中の (a) よりすぐにわかる．

(2) 補題の証明中の (b) よりすぐにわかる．

例 **3.4.** $V = \mathrm{Mat}(p\times q,\mathbb{R})$ で，$c = E_{11}+\cdots+E_{kk}$ のとき．

$x \in V$ を $x = x_0 + x_{1/2} + x_1$ $(x_j \in V_j(c); j = 0, \frac{1}{2}, 1)$ と表すと，

$$P(c)(x_0 + x_{1/2} + x_1) = {}^t x_1$$

となる．

定義． JTS V において，$\mathrm{tr}(x \,\square\, y)$ が V に正定値内積を与えるとき，V は正定値であるという．

例 **3.5.** $V = \mathrm{Mat}(p\times q,\mathbb{R})$ は正定値 JTS である．まず V に $\langle\, x \,|\, y \,\rangle_{\mathrm{tr}} := \mathrm{tr}({}^t x y)$ で内積を入れよう．これは $V \cong \mathbb{R}^{p\times q}$ と見なしたときの標準内積である．従ってまた $\langle\, x \,|\, y \,\rangle_{\mathrm{tr}} = \mathrm{tr}(y\,{}^t x)$ でもある．このとき，行列単位 $E_{ij} \in V$ $(1 \leqq i \leqq p,\ 1 \leqq j \leqq q)$ は V の正規直交基底をなし

$$\mathrm{tr}(x \,\square\, y) = \sum_{i,j} \langle\, (x \,\square\, y) E_{ij} \,|\, E_{ij} \,\rangle_{\mathrm{tr}}.$$

ここで $(x \,\square\, y)E_{ij} = \frac{1}{2}(x\,{}^t y E_{ij} + E_{ij}\,{}^t y x)$ であるから

$$\mathrm{tr}(x \,\square\, y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \mathrm{tr}({}^t E_{ij}\, y\,{}^t x E_{ij}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \mathrm{tr}({}^t x y\,{}^t E_{ij} E_{ij})$$

ここで $E_{ij}{}^tE_{ij}$ は $p\times p$ 行列としての (i,i) 行列単位，${}^tE_{ij}E_{ij}$ は $q\times q$ 行列としての行列単位に等しいから

$$\mathrm{tr}(x\,\Box\,y) = \frac{q}{2}\,\mathrm{tr}(y\,{}^tx) + \frac{p}{2}\,\mathrm{tr}({}^txy) = \frac{p+q}{2}\,\langle\, x\,|\,y\,\rangle_{\mathrm{tr}}.$$

ゆえに $V = \mathrm{Mat}(p\times q,\mathbb{R})$ は正定値 JTS である．

以下 V は正定値 JTS とし，$\langle\, x\,|\,y\,\rangle := \mathrm{tr}(x\,\Box\,y)$ とおく．JT identity

$$[a\,\Box\,b,\, x\,\Box\,y] = \big((a\,\Box\,b)x\big)\,\Box\,y - x\,\Box\,\big((b\,\Box\,a)y\big)$$

の両辺を trace をとると，

$$\langle\,(a\,\Box\,b)x\,|\,y\,\rangle = \langle\, x\,|\,(b\,\Box\,a)y\,\rangle$$

を得る．これは $(a\,\Box\,b)^* = b\,\Box\,a$ であることを示している．特に任意の $x\in V$ に対して，$x\,\Box\,x$ は自己共役である．従って $x\,\Box\,x$ の固有値はすべて実数である．

命題 3.6. 任意の $x\in V$ に対して，自己共役作用素 $x\,\Box\,x$ は半正定値である（固有値はすべて非負）．

証明. $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ を作用素 $x\,\Box\,x$ の相異なる固有値とし，$V_j := V(x\,\Box\,x,\lambda_j)$ を λ_j に対応する $x\,\Box\,x$ の固有空間とする．このとき $V = \sum_{j=1}^{m} V_j$ であり，それに従って $x = \sum_{j=1}^{m} x_j$ と表す．定義より

$$x^3 = (x\,\Box\,x)x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j.$$

ここで次の補題が必要である．

補題 3.7. (1) $i\neq j$ ならば，$x_i\,\Box\,x_j = 0$.
(2) $x_j^3 = \lambda_j x_j$.

証明. (1) 各 $i=1,\ldots,m$ に対して，$\varphi_i(t) := \prod_{j\neq i}(t-\lambda_j) \in \mathbb{R}[\,t\,]$ を考え，$\widetilde{\varphi}_i(t) := t\varphi_i(t^2)$ とおく．明らかに $\widetilde{\varphi}_i(t)$ は奇数乗のみの多項式なので，t に x を代入して $\widetilde{\varphi}_i(x)$ を考えることができる．

$$x^{2k+1} = (x\,\Box\,x)^k x = \sum_{j=1} \lambda_j^k x_j$$

であり，$\varphi_i(t)=\sum a_k t^k$ $(a_k\in\mathbb{R})$ なら $\widetilde{\varphi}_i(t)=\sum a_k t^{2k+1}$ であるから

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_i(x)&=\sum_k a_k x^{2k+1}=\sum_k a_k\sum_{j=1}^m \lambda_j^k x_j\\&=\sum_{j=1}^m\Bigl(\sum_k a_k\lambda_j^k\Bigr)x_j=\sum_{j=1}^m\varphi_i(\lambda_j)x_j\\&=\Bigl[\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)\Bigr]x_i.\end{aligned}$$

従って

$$\psi_i(t):=\frac{\widetilde{\varphi}_i(t)}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)}\in\mathbb{R}[\,t\,]$$

とおくと，$x_i=\psi_i(x)$ となる．とくに x_i は x の多項式で書けるので，命題 2.3 より $x_i\,\square\,x_j=x_j\,\square\,x_i$ となる．さらに JT identity より，任意の $k=1,\dots,m$ と任意の $u\in V_k$ に対して

$$(x\,\square\,x)\{x_i,x_j,u\}=(\lambda_i-\lambda_j+\lambda_k)\{x_i,x_j,u\}.$$

これは

$$(x_i\,\square\,x_j)(V_k)\subset V(x\,\square\,x,\,\lambda_i-\lambda_j+\lambda_k)$$

を意味する．さて，$x_i\,\square\,x_j=x_j\,\square\,x_i$ であり，それが零作用素でなかったら，どこかの V_k 上で零作用素ではない．その k について $u\in V_k$ を選んで $(x_i\,\square\,x_j)u\neq 0$ の固有値を考えると，

$$\lambda_i-\lambda_j+\lambda_k=\lambda_j-\lambda_i+\lambda_k$$

が成り立たないといけないが，これより $\lambda_i=\lambda_j$ を得るので矛盾である．ゆえに $x_i\,\square\,x_j=0$ である．

(2) 定義より $(x\,\square\,x)x_j=\lambda_j x_j$ であるが，左辺について，(1) より

$$\begin{aligned}(x\,\square\,x)x_j&=\sum_{p,q}(x_p\,\square\,x_q)x_j=\sum_p(x_p\,\square\,x_p)x_j\\&=\sum_p(x_j\,\square\,x_p)x_p=(x_j\,\square\,x_j)x_j\\&=x_j^3.\end{aligned}$$

ゆえに $x_j^3=\lambda_j x_j$ である． □

補題 3.8. $a\in V$，$a\neq 0$ かつ $a^3=\lambda a$ ならば $\lambda>0$ である．

証明. 命題 2.2 (2) より

$$\lambda a \,\square\, a = a^3 \,\square\, a = 2(a \,\square\, a)^2 - P(a)^2. \qquad (*)$$

両辺に右から $a \,\square\, a$ とかけると

$$\begin{aligned}\lambda(a \,\square\, a)^2 &= 2(a \,\square\, a)^3 - P(a)^2(a \,\square\, a) \\ &= 2(a \,\square\, a)^3 - P(a)P(a^3, a) \qquad \text{（命題 2.2 (1) による）} \\ &= 2(a \,\square\, a)^3 - \lambda P(a)^2 \\ &\overset{(*)}{=} 2(a \,\square\, a)^3 + \lambda^2 a \,\square\, a - 2\lambda(a \,\square\, a)^2.\end{aligned}$$

ゆえに $2(a \,\square\, a)^3 - 3\lambda(a \,\square\, a)^2 + \lambda^2 a \,\square\, a = 0$．左辺を因数分解すれば

$$(a \,\square\, a)\big(2a \,\square\, a - \lambda I\big)\big(a \,\square\, a - \lambda I\big) = 0$$

となるから，$a \,\square\, a$ の固有値は高々 $0, \frac{1}{2}\lambda, \lambda$ である．ゆえに

$$0 < \|a\|^2 = \mathrm{tr}(a \,\square\, a) = \alpha\lambda \qquad (\text{for some } \alpha \geqq 0).$$

ゆえに $\lambda > 0$ である．

さて命題 3.6 の証明に戻ろう．補題 3.7 と補題 3.8 により，$x_j \neq 0$ ならば $\lambda_j > 0$ である，そのような j について $c_j := \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\, x_j$ とおくと

$$c_j^3 = \frac{1}{\lambda_j^{3/2}}\, x_j^3 = \frac{1}{\lambda_j^{1/2}}\, x_j = c_j$$

となり，c_j は tripotent である．このとき

$$x = \sum_{j=1}^{m} x_j = \sum_{x_j \neq 0} \sqrt{\lambda_j}\, c_j$$

となり

$$x \,\square\, x = \sum_{x_j \neq 0} \lambda_j (c_j \,\square\, c_j)$$

は半正定値である． $\square$

§4. スペクトル分解

以下 $(V, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ を正定値な JTS とする．そして，V の内積 $\langle x \,|\, y \rangle := \mathrm{tr}(x \,\Box\, y)$ をとっておく．

定義． $c, d \in V$ を tripotents とする．$c \,\Box\, d = 0$（零作用素）のとき，c, d は直交するという．

注意． (1) $d \,\Box\, c = (c \,\Box\, d)^*$ であるから,「$c \,\Box\, d = 0 \iff d \,\Box\, c = 0$」に注意．
(2) c, d が直交する tripotents なら

$$\langle c \,|\, d \rangle = \mathrm{tr}(c \,\Box\, d) = 0$$

となって，c, d は内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関して直交している（特に c, d は 1 次独立である）．しかし逆は一般には成立しない．

たとえば $V = \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ で考える．$\{x, y, z\} := \frac{1}{2}(x{}^t yz + z{}^t yx)$ で正定値な JTS になっている．内積は $\langle x \,|\, y \rangle = 2\,\mathrm{tr}({}^t xy)$ である．

$$c := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

は tripotents である．${}^t cd = 0$ であるから，$\langle c \,|\, d \rangle = 0$ である．一方で，

$$c{}^t d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^t d, \qquad {}^t dc = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

であるから，$(c \,\Box\, d)x = \frac{1}{2}{}^t dx$．ゆえに $c \,\Box\, d$ は零作用素ではない．

各 $v \in V$ に対して，

$$\mathbb{R}[v] := \mathrm{span}\{v, v^3, \dots\} \qquad (v \text{ の奇数乗で張られる } V \text{ の部分空間})$$

とおく．

定理 4.1 (スペクトル分解)**．** $v \in V$ とする．このとき，互いに直交する non-zero tripotents $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}[v]$ と，$0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m$ が存在して，

$$v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_j \qquad (*)$$

と表される．この表示は一意的で，v のスペクトル分解と呼ぶ．$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ を x の固有値と呼ぶ．

証明． $\mu_1, \dots, \mu_m$ $(\geqq 0)$ を $v \,\Box\, v$ の固有値とし，対応する固有空間を $V_1, \dots. V_m$ とする．$v = \sum_{j=1}^{m} v_j$ と表すとき，§3 の結果（命題 3.6 とその証明）より，$v_j \neq 0$ である

ような j に対して，$c_j := \dfrac{v_j}{\sqrt{\mu_j}}$ とおくと，これらの c_j は互いに直交する tripotents である．そして $\lambda_j := \sqrt{\mu_j}$ とおくと $v = \sum\limits_{v_j \neq 0} \lambda_j c_j$ と表せた．$v_j \neq 0$ のとき，$\lambda_j > 0$ も §3 で示した．表示 $(*)$ の一意性のみ問題．

主張 1. 一般に $(*)$ の表示があるとき（前節の構成は忘れる），$c_j \in \mathbb{R}[v]$ であり，$c_1, \ldots, c_m$ は $\mathbb{R}[v]$ の基底である．

主張 1 の証明. $(v \,\square\, v)v = \sum \lambda_j^3 c_j$，従って

$$v^{2k-1} = (v \,\square\, v)^{k-1} v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{2k-1} c_j. \tag{4.1}$$

ここで，行列

$$\Phi := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_m \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \ldots & \lambda_m^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{2m-1} & \lambda_2^{2m-1} & \ldots & \lambda_m^{2m-1} \end{pmatrix}$$

を考えると，(4.1) より

$$\begin{pmatrix} v \\ v^3 \\ \vdots \\ v^{2m-1} \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

と表せる．ここで

$$\det \Phi = \lambda_1 \ldots \lambda_m \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_m^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{2(m-1)} & \lambda_2^{2(m-1)} & \ldots & \lambda_m^{2(m-1)} \end{pmatrix}.$$

であるが，次の補題にいう Vendermonde の行列式により，$\det \Phi \neq 0$．すなわち Φ は可逆である．

補題 4.2 (Vandermonde の行列式).

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

従って (4.2) から $c_1, \ldots, c_m$ が解けて，v の奇数べきの多項式で表されることになる．ゆえに各 $j = 1, \ldots, m$ について，$c_j \in \mathbb{R}[v]$ である．$c_1, \ldots, c_m$ は 1 次独立なので，これらの c_j が $\mathbb{R}[v]$ の基底になることは明らか．

さて $(*)$ ともう一つ，$0 < \mu_1 < \cdots < \mu_l$ と 直交する non-zero tripotents $d_1, \ldots, d_l$ によって，

$$v = \sum_{k=1}^{l} \mu_k d_k$$

と表されたとする．主張 1 により，$d_1, \ldots, d_l$ は $\mathbb{R}[v]$ の基底になるから，$l = m$ である．さて $d_k = \sum_{j=1}^{m} \beta_{kj} c_j$ とする．$d_k^3 = d_k$ より，$\beta_{kj}^3 = \beta_{kj}$．ゆえに $\beta_{kj} = 0, \pm 1$．$d_k \neq 0$ であるから

$$\forall k \text{ に対して，} \exists j \text{ such that } \beta_{kj} \neq 0 \tag{4.3}$$

そして $k_1 \neq k_2$ のとき

$$0 = d_{k_1} \,\square\, d_{k_2} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{k_1 j} \beta_{k_2 j} (c_j \,\square\, c_j).$$

$c_1 \,\square\, c_1, \ldots, c_m \,\square\, c_m$ は 1 次独立であるから（c_j に作用させてみよ），

$$\beta_{k_1 j} \beta_{k_2 j} = 0 \qquad (\text{for } \forall j). \tag{4.4}$$

(4.3) と (4.4) より

$$\forall k \text{ に対して，ただ一つ } j \text{ があって，} \beta_{kj} \neq 0 \quad \text{（後の Quiz 参照）}$$

しかも (4.4) があるので，異なる k に対しては，それに応ずる j も異なる．ゆえに，$\sigma \in \mathfrak{S}_m$（$m$ 次対称群）があって，$d_k = \pm c_{\sigma(k)}$ となる．そうすると

$$\sum \mu_k d_k = v = \sum \lambda_k c_k = \sum \lambda_{\sigma(k)} c_{\sigma(k)} = \sum \pm \lambda_{\sigma(k)} d_k.$$

よって $\pm \mu_k = \lambda_{\sigma(k)}$ となるが，$\mu_k > 0$，$\lambda_{\sigma(k)} > 0$ より，$\mu_k = \lambda_{\sigma(k)}$ である．さらに，共に単調増加になるように番号づけてあるので，σ は恒等置換であり，従って $d_k = c_k$ である． □

Quiz. β_{kj} $(1 \leqq k, j \leqq m)$ を m^2 個の数で，次の (1),(2) をみたすとする：
(1) $\forall k$ に対して，番号 j が存在して，$\beta_{kj} \neq 0$ となる．
(2) $k_1 \neq k_2$ ならば，任意の j に対して $\beta_{k_1 j} \beta_{k_2 j} = 0$ である．
このとき，各 k に対して，ただ一つ番号 j があって，$\beta_{kj} \neq 0$ となる．
証明. 結論を否定すると，(1) により

$$\text{番号 } k_0 \text{ と } j_1 \neq j_2 \text{ が存在して，} \beta_{k_0 j_1} \neq 0 \text{ かつ } \beta_{k_0 j_2} \neq 0$$

となる．このとき，(2) より，任意の $k \neq k_0$ に対して，$\beta_{k j_1} = \beta_{k j_2} = 0$．従って (1) より，$j_1, j_2$ と異なる $j(k)$ が存在して，$\beta_{k j(k)} \neq 0$．$j(k)$ の可能性としては j_1, j_2 を

除く $k-2$ 通りしかないので，$k \neq k_0$ が動くとき，$j(k)$ をすべて異なるようにはとれない．ゆえに $k_1 \neq k_2$ が存在して，$j(k_1) = j(k_2)$（$= j_0$ とおく）．そうすると $\beta_{k_1 j_0}\beta_{k2j_0} \neq 0$ となって，(2) に反する． $\square$

例 4.3. $V = \mathrm{Mat}(p\times q, \mathbb{R})$ とする．各 $T \in V$ は線型作用素 $\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ である．${}^tTT$ は $\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ は自己共役な線型変換であるから，そのスペクトル分解を

$$ {}^tTT = \sum_{j=1}^{m} \mu_j P_j $$

とする．ここで $0 < \mu_1 < \cdots < \mu_m$ であり，P_j は μ_j に対応する固有空間 E_j への直交射影作用素である．

E_j の正規直交基底 $e_k^{(j)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$，これらに，もし $\mathrm{Ker}({}^tTT)$（すなわち ${}^tTT$ の 0 固有空間）の次元が正ならば，そこの正規直交基底 $e_k^{(0)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ も併せて，$\{e_k^{(j)}\}_{j,k}$ を $\mathbb{R}^q$ の正規直交基底にする．このとき

$$ P_j x = \sum_k \langle\, x \mid e_k^{(j)} \,\rangle e_k^{(j)} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^q) $$

となる．各 $j = 1, 2, \ldots$ と $k = 1, 2, \ldots$ に対して，$f_k^{(j)} := \dfrac{1}{\sqrt{\mu_j}} T e_k^{(j)}$ とおくと，$j, j' \geqq 1$ のとき

$$ \begin{aligned} \langle\, f_k^{(j)} \mid f_{k'}^{(j')} \,\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\mu_j \mu_{j'}}} \langle\, T e_k^{(j)} \mid T e_{k'}^{(j')} \,\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu_j \mu_{j'}}} \langle\, {}^tTT e_k^{(j)} \mid e_{k'}^{(j')} \,\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\mu_j}{\mu_{j'}}} \langle\, e_k^{(j)} \mid e_{k'}^{(j')} \,\rangle = \delta_{jj'}\delta_{kk'}. \end{aligned} $$

ゆえに $\{f_k^{(j)}\}$ も正規直交系である．

主張 1. $Tx = \sum_{j=1}^{m} \sqrt{\mu_j} \sum_k \langle\, x \mid e_k^{(j)} \,\rangle f_k^{(j)}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^q)$ が成り立つ．

証明. 右辺を Sx とおく．$j \geqq 1$ のとき，任意の k に対して

$$ S e_k^{(j)} = \sqrt{\mu_j} f_k^{(j)} = T e_k^{(j)}. $$

そして，${}^tTT e_k^{(0)} = 0$ より，

$$ \| T e_k^{(0)} \|^2 = \langle\, T e_k^{(0)} \mid T e_k^{(0)} \,\rangle = \langle\, {}^tTT e_k^{(0)} \mid e_k^{(0)} \,\rangle = 0. $$

ゆえに $T e_k^{(0)} = 0$．一方定義より明らかに $S e_k^{(0)} = 0$ である．以上から $S = T$ である． $\square$

さて $C_j x := \sum\limits_k \langle\, x \,|\, e_k^{(j)} \,\rangle f_k^{(j)}$ $(x \in \mathbb{R}^q)$ で作用素 C_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ を定義すると，各 C_j は明らかに部分的等長写像である．実際，始空間は E_j，終空間は $\sum_k \mathbb{R} f_k^{(j)}$ である．従って，各 C_j は tripotent である．

主張 2. $\{C_j\}_{j=1}^m$ は tripotents の直交系である．

証明. $x \in \mathbb{R}^q$, $y \in \mathbb{R}^p$ のとき

$$\langle\, C_j x \,|\, y \,\rangle = \sum_k \langle\, x \,|\, e_k^{(j)} \,\rangle \langle\, f_k^{(j)} \,|\, y \,\rangle = \left\langle x \,\middle|\, \sum_k \langle\, y \,|\, f_k^{(j)} \,\rangle e_k^{(j)} \right\rangle$$

であるから，${}^t C_j = \sum_k \langle\, \cdot \,|\, f_k^{(j)} \,\rangle e_k^{(j)}$．このとき，$i \neq j$ ならば

$$C_i {}^t C_j y = \sum_{k'} \langle\, {}^t C_j y \,|\, e_{k'}^{(i)} \,\rangle f_{k'}^{(i)} = \sum_{k', k} \langle\, y \,|\, f_k^{(j)} \,\rangle \langle\, e_k^{(j)} \,|\, e_{k'}^{(i)} \,\rangle f_{k'}^{(i)} = 0,$$
$${}^t C_j C_i x = \sum_k \langle\, C_i x \,|\, f_k^{(j)} \,\rangle e_k^{(j)} = \sum_{k, k'} \langle\, x \,|\, e_{k'}^{(i)} \,\rangle \langle\, f_{k'}^{(i)} \,|\, f_k^{(j)} \,\rangle e_k^{(j)} = 0$$

となり，$C_i {}^t C_j$ と ${}^t C_j C_i$ はともに零作用素である．ゆえに任意の $Z \in V$ に対して

$$(C_i \,\square\, C_j) Z = \frac{1}{2} (C_i {}^t C_j Z + Z {}^t C_j C_i) = 0.$$

主張 1 と主張 2 により，$T = \sum_j \sqrt{\mu_j} C_j$ は定理 4.2 の意味での T のスペクトル分解である．

行列論や応用数学では，$\lambda_j := \sqrt{\mu_j}$ を T の特異値 (singular value) と呼び，ここでのスペクトル分解を特異値分解と呼んでいる．

以下，$\{c_1, \ldots, c_m\}$ を non-zero-tripotents の直交系とする．

補題 4.4. (1) $c := c_1 + \cdots + c_m$ も tripotent である．
(2) $[c_i \,\square\, c_i,\, c_j \,\square\, c_j] = 0$

証明. (1) $c_i \,\square\, c_j = 0$ より

$$\begin{aligned} \{c_1 + \cdots + c_m,\, c_1 + \cdots + c_m,\, c_1 + \cdots + c_m\} &= \{c_1, c_1, c_1\} + \cdots + \{c_m, c_m, c_m\} \\ &= c_1 + \cdots + c_m. \end{aligned}$$

(2) JT identity から

$$\begin{aligned} [c_i \,\square\, c_i,\, c_j \,\square\, c_j] &= \big((c_i \,\square\, c_i) c_j\big) \,\square\, c_j - c_j \,\square\, \big((c_i \,\square\, c_i) c_j\big) \\ &= \big((c_j \,\square\, c_i) c_i\big) \,\square\, c_j - c_j \,\square\, \big((c_j \,\square\, c_i) c_i\big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となって証明終わり． □

従って，$\{c_i \Box c_i\}_{i=1}^m$ は自己共役作用素の可換系であるから，V は同時固有空間に分解できる．$V_j(c_k)$ $(j = 0, \frac{1}{2}, 1)$ を tripotent c_k の Peirce j 空間とする．

定理 4.5 (同時 Peirce 分解).

$$\begin{aligned}
V_{00} &:= V_0(c_1) \cap \cdots \cap V_0(c_m), \\
V_{0j} &:= V_{\frac{1}{2}}(c_j) \bigcap \left(\bigcap_{i \neq j} V_0(c_i) \right) \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \\
V_{ij} &:= V_{\frac{1}{2}}(c_i) \cap V_{\frac{1}{2}}(c_j) \quad (1 \leqq i < j \leqq m), \\
V_{ii} &:= V_1(c_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{aligned}$$

とおくと，$V = \sum_{0 \leqq i \leqq j \leqq m} V_{ij}$ となる．

証明． まず，$c := c_1 + \cdots + c_m$ も tripotent であること，及び

$$(c_1 \Box c_1) + \cdots + (c_m \Box c_m) = c \Box c$$

に注意する．共通の固有空間上での簡単な考察から tripotent c の 各 Peirce 空間 $V_j(c)$ $(j = 0, \frac{1}{2}, 1)$ について

$$\begin{aligned}
V_0(c) &= V_0(c_1) \cap \cdots \cap V_0(c_m), \\
V_{\frac{1}{2}}(c) &= \sum_{j=1}^{m} \left[V_{\frac{1}{2}}(c_j) \bigcap \left(\bigcap_{i \neq j} V_0(c_i) \right) \right], \\
V_1(c) &= \sum_{1 \leqq i < j \leqq m} \big(V_{\frac{1}{2}}(c_i) \cap V_{\frac{1}{2}}(c_j) \big) + \sum_{i=1}^{m} V_1(c_i)
\end{aligned}$$

がわかるので，結果が従う． $\Box$

§5. JTS frames

以下 $(V, \{\cdot, \cdot, \cdot\})$ を正定値な JTS とする．V の tripotents 全体を $\mathcal{T}$ で表す：

$$\mathcal{T} := \{V \text{ の tripotents}\}.$$

$c \in \mathcal{T}$ とし，その Peirce k 空間を $V_k(c)$ $(k = 0, \frac{1}{2}, 1)$ とする．

補題 5.1. $V_0(c) \Box V_1(c) = V_1(c) \Box V_0(c) = \{0\}$（零作用素のみ）.

証明． $(p \,\square\, q)^* = q \,\square\, p$ より，$V_1(c) \,\square\, V_0(c) = \{0\}$ を示せば十分である．$a \in V_1(c)$, $x \in V_0(c)$ とする．$k = \frac{1}{2}$ または $k = 1$ のとき，(3.1) より

$$(a \,\square\, x)(V_k(c)) \subset \{V_1(c), V_0(c), V_k(c)\} = \{0\}.$$

よって，任意に $y \in V_0(c)$ として，$(a \,\square\, x)y = 0$ が示されれば，$a \,\square\, x = 0$ となる．

さて，再び (3.1) より，$\{c, y, c\} \in \{V_1(c), V_0(c), V_1(c)\} = \{0\}$ であるから，JT identity より

$$0 = \{x, a, \{c, y, c\}\} = 2\{\{x, a, c\}, y, c\} - \{c, \{a, x, y\}, c\}. \tag{5.1}$$

最右辺の第 1 項において

$$\{x, a, c\} = \{x, a, \{c, c, c\}\} = 2\{\{x, a, c\}, c, c\} - \{c, \{a, x, c\}, c\}. \tag{5.2}$$

ここで $\{x, a, c\} \in \{V_0(c), V_1(x), V_1(c)\} \subset V_0(c)$ より

$$\{\{x, a, c\}, c, c\} = (c \,\square\, c)(\{x, a, c\}) = 0.$$

そして

$$\{a, x, c\} \in \{V_1(c), V_0(c), V_1(c)\} \subset \{0\}.$$

よって (5.2) の右辺 $= 0$ が出るので，$\{x, a, c\} = 0$ である．従って (5.1) より

$$P(c)(\{a, x, y\}) = \{c, \{a, x, y\}, c\} = 0.$$

$\{a, x, y\} \in \{V_1(c), V_0(c), V_0(c)\} \subset V_1(c)$ と 系 3.3 (2) より，$\{a, x, y\} = 0$ が出る． □

定義． $c, d \in \mathcal{T}$ とする．
$c < d \overset{\text{def}}{\iff} 0 \neq d - c \in \mathcal{T}$ かつ $c \,\square\, (d - c) = 0$.
言い換えると，$c < d$ とは，$0 \neq \exists c' \in \mathcal{T}$ with $c \,\square\, c' = 0$ s.t. $d = c + c'$ となること．

補題 5.2. $\mathcal{T}$ における $\leqq$ は partial order である．

証明． 以下 $c, d, e \in \mathcal{T}$ とする．
(1) $c \leqq c$ は明らか．
(2) $c \leqq d$ かつ $d \leqq c$ とする．このとき，$d = c + (d - c)$，$c = d + (c - d)$ において，

$$(d - c) \,\square\, c = 0, \qquad (c - d) \,\square\, d = 0.$$

従って

$$d - c = \{d - c,\, d - c,\, d - c\} = \{d - c,\, d,\, d - c\} = 0.$$

ゆえに $d=c$ である．
(3) $c \leqq d$ かつ $d \leqq e$ とする．このとき，$d=c+(d-c)$，$e=d+(e-d)$ において

$$(d-c)\,\Box\, c=0, \qquad (e-d)\,\Box\, d=0.$$

さて，$e=c+(e-c)=c+\{(e-d)+(d-c)\}$ において

$$\{d,\,d,\,d-c\}=\{d,\,d-c,\,d-c\}=\{d-c,\,d-c,\,d-c\}=d-c,$$
$$\{d,\,d,\,e-d\}=0.$$

ゆえに $d-c\in V_1(d)$，$e-d\in V_0(d)$．補題 5.1 より，$(d-c)\,\Box\,(e-d)=0$．よって $e-c=(e-d)+(d-c)\in\mathcal{T}$．そして

$$(e-c)\,\Box\, c=(e-d)\,\Box\, c+(d-c)\,\Box\, c=-(e-d)\,\Box\,(d-c)=0.$$

ゆえに $c\leqq e$ である． □

以下 $\mathcal{T}$ でこの順序に関しての maximal や minimal なものを考える．

補題 5.3. $c\in\mathcal{T}$ とする．このとき

$$c \text{ が maximal} \iff V_0(c)=\{0\}.$$

証明. $[\Longrightarrow]$ $c\in\mathcal{T}$ が maximal かつ $V_0(c)\neq\{0\}$ とする．元 $0\neq x\in V_0(c)$ のスペクトル分解を V で行って，$x=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j c_j$ とする．ただし，$0<\lambda_1<\cdots<\lambda_m$. $x\neq 0$ であるので，ある番号 j に対して，$c_j\neq 0$ である．さらに，$c_j\in\mathbb{R}[x]$ であり，(3.1) より $\mathbb{R}[x]\subset V_0(c)$ となるから，$c_j\in V_0(c)$ である．これは c_j が $V_0(c)$ の non-zero tripotent であることを示している．補題 5.1 より $c_j\,\Box\, c=0$ であるから，$c+c_j\in\mathcal{T}$ となって，c の極大性に反する．
$[\Longleftarrow]$ $c\in\mathcal{T}$ が maximal でなかったら，$0\neq d\in\mathcal{T}$ が存在して，$c\,\Box\, d=0$ かつ $c+d\in\mathcal{T}$ となる．このとき，$(c\,\Box\, c)d=\{d,c,c\}=0$ より，$d\in V_0(c)$ である． □

定義. Minimal な non-zero tripotent を **primitive** であるという．

従って，$0\neq c\in\mathcal{T}$ が primitive であるとは，non-zero で直交する tripotents c_1,c_2 を用いて，$c=c_1+c_2$ と分解できないことである．

補題 5.4. 0 でない任意の $c\in\mathcal{T}$ は互いに直交する primitive tripotents の和で表される．

証明．　$0 \neq c \in \mathcal{T}$ が primitive でないとする．互いに直交する non-zero tripotents への分解の中で，最も長いものを $c = c_1 + \cdots + c_n$ とする．このとき，各 c_i は primitive であることを示そう．

結論を否定する．必要なら番号を付け替えて，c_1 が primitive でないとする：

$$c_1 = c_1' + c_2'', \qquad c_1' \,\Box\, c_1'' = 0, \qquad c_1', c_1'' \in \mathcal{T} \setminus \{0\}.$$

このとき

$$(c_1 \,\Box\, c_1)c_1' = \{c_1, c_1', c_1'\} = \{c_1', c_1', c_1'\} = c_1'.$$

ゆえに $c_1' \in V_1(c)$．同様に $c_1'' \in V_1(c_1)$．一方で，$j \neq 1$ のとき，$c_j \in V_0(c_1)$．補題 5.1 より $c_1' \,\Box\, c_j = c_1'' \,\Box\, c_j = 0$．このとき

$$c = c_1' + c_1'' + c_2 + \cdots + c_n$$

は互いに直交する non-zero tripotents の和となって，n の定義に反する．　$\Box$

定義．　**JTS frame** とは，primitive idempotents の極大な直交系のこと．

$(c_1, \ldots, c_r)$ が JTS frame ならば，補題 5.1 より，$c := c_1 + \cdots + c_r$ は maximal tripotent である．

各 $c \in \mathcal{T}$ に対して

$$A(c) := \{x \in V_1(c)\ ;\ P(c)x = x\}$$

とおく．$A(c)$ は Euclid 型の Jordan 代数になる（次節（以降）参照）．

命題 **5.5.**　$c \in \mathcal{T}$ が primitive $\iff$ $A(c) = \mathbb{R}c$.

例 **5.6.**　$V = \mathrm{Mat}(p \times q, \mathbb{R})$ で考える．簡単のため $p < q$ とする．各 $i = 1, \ldots, p$ に対して $c_i := E_{ii} \in V$（(i,i) 行列単位）とおき，$c := c_1 + \cdots + c_p$ とする：

$$c = \left(\begin{array}{c|c} I_p & O \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & & & & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

$V_0(c) = \{0\}$ より，c は maximal tripotent である．また例 3.4 より

$$A(c_1 + \cdots + c_k) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Sym}(k, \mathbb{R}) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

であり，特に $A(c_j)=\mathbb{R}c_j$ より，各 c_j は primitive である．ゆえに $(c_1,\ldots,c_p)$ は JTS frame である．この JTS frame に関する V の同時 Peirce 分解は

$$
\begin{aligned}
V_{0j} &:= \mathbb{R}E_{j,p+1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}E_{j,q} && (j=1,\ldots,p)\\
V_{ij} &:= \mathbb{R}E_{ij}\oplus\mathbb{R}E_{ji} && (1\leqq i<j\leqq p)\\
V_{ii} &:= \mathbb{R}c_i && (i=1,\ldots,p)
\end{aligned}
$$

とおくとき，$V=\sum_{\substack{0\leqq i\leqq j\leqq p\\(i,j)\neq(0,0)}} V_{ij}$ である．

定義． V の JTS 自己同型の全体のなす群を $\mathrm{Aut}(V)$ で表す．すなわち

(5.3) $\quad \mathrm{Aut}(V):=\{g\in GL(V)\,;\ g\{x,y,z\}=\{gx,gy,gz\}\quad(\text{for }\forall x,y,z\in V)\}.$

補題 5.7. $\mathrm{Aut}(V)$ は V の直交群の閉部分群．従ってコンパクトである．

証明． $g\in\mathrm{Aut}(V)$ とする．(5.3) で，z のところを $g^{-1}z$ と置き換えることにより，$g(x\,\square\,y)g^{-1}=gx\,\square\,gy$ を得る．両辺の trace をとると，$\langle\,x\,|\,y\,\rangle=\langle\,gx\,|\,gy\,\rangle$ を得る．ゆえに $g\in O(V)$（V の直交群）．閉部分群であることは明らか． $\square$

例 5.8. $V=\mathrm{Mat}(p\times q,\mathbb{R})$ とする．各 $k_1\in O(p)$，$k_2\in O(q)$ に対して

$$T_{k_1,k_2}v:=k_1vk_2^{-1}\qquad(v\in V)$$

とおくと，$T_{k_1,k_2}\in\mathrm{Aut}(V)$ であって，$O(p)\times O(q)\ni(k_1,k_2)\mapsto T_{k_1,k_2}\in\mathrm{Aut}(V)$ は群準同型である．

$K:=(\mathrm{Aut}(V))^\circ$（$\mathrm{Aut}(V)$ の単位元の連結成分）とおく．任意の 2 個の maximal tripotents c,d に対して，$k\in K$ が存在して，$d=kc$ となることがわかっている．

• JTS frame を構成する primitive tripotents の個数は，frame によらず一定であることが示される．この個数を JTS の階数と呼ぶ．

定義． $c\in\mathcal{T}$ とする．c の階数とは $V_1(c)$ の階数のこと（注意：c は $V_1(c)$ の maximal tripotent である．）

• primitive tripotent の階数は 1 である．

• maximal tripotent の階数は V の階数に等しい（定義!）．

§6. Jordan 代数と JTS

A を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$). A に双線型な積 $x, y \mapsto xy$（結合法則は仮定しない）次の 2 条件がみたされるとき，A は **Jordan 代数である**という：任意の $x, y \in A$ に対して

(JA1) $xy = yx$,

(JA2) $x^2(xy) = x(x^2y)$.

A で $x \in A$ をかけるという乗法作用素を $L(x)$ で表す：$L(x)y := xy$ $(y \in A)$. このとき，(JA2) が任意の $y \in A$ に成立することと，次の作用素の等式が同値であることがわかる：

$$[L(x^2),\, L(x)] = 0. \tag{6.1}$$

例 **6.1.** A を結合法則が成り立つ代数とする．たとえば $A = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$). A に新たな積 $\circ$ を

$$x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx)$$

で定義すると，この積で A は Jordan 代数になる．実際，任意の $x, y \in A$ で (JA1) が成り立つことは明らかである．また平方はどちらの積でも同じなので，単に x^2 と書くことにして，簡単な計算により

$$x^2 \circ (x \circ y) = \frac{1}{4}(x^3y + x^2yx + xyx^2 + yx^3) = x \circ (x^2 \circ y).$$

例 **6.2.** A は結合法則が成り立つ代数とし，その部分空間 V は平方安定とする．すなわち，「$x \in V \implies x^2 \in V$」が成り立つとする．このとき，$V$ に新たに積 $\circ$ を定義すると，V は Jordan 代数になる：

$$x \circ y := \frac{1}{2}\big((x+y)^2 - x^2 - y^2\big) \qquad (x, y \in V).$$

実際これの右辺は $\frac{1}{2}(xy+yx)$ に等しい．

(i) $A = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$) において，$V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{K})$ は平方安定．従って，V は Jordan 代数になる．

(ii) $A = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ の $\underline{\text{実}}$ 部分ベクトル空間 $V = \mathrm{Herm}(n, \mathbb{C})$（エルミート行列全体）は平方安定．従って，$V$ は $\underline{\text{実}}$ Jordan 代数になる．

以下 A は Jordan 代数とする．

補題 **6.3.** $x, y, z \in A$ とする．

(1) $[L(xy),\, L(z)] + [L(yz),\, L(x)] + [L(zx),\, L(z)] = 0.$

(2) $L\bigl((xy)z\bigr) = L(yz)L(x)+L(zx)L(y)+L(xy)L(z)-L(x)L(z)L(y)-L(y)L(z)L(x)$.
(3) $\bigl[[L(x),\, L(z)],\, L(y)\bigr] = L(x(yz)-(xy)z)$.

証明． (1) $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}$ とする．(6.1) より

$$L\bigl((\xi x+\eta y+\zeta z)^2\bigr)L(\xi x+\eta y+\zeta z) = L(\xi x+\eta y+\zeta z)L\bigl((\xi x+\eta y+\zeta z)^2\bigr).$$

$u \mapsto L(u)$ が線型であることに注意して，この両辺を，作用素を係数とする ξ, η, ζ の多項式に展開する．両辺の $\xi\eta\eta$ の係数を比較すると

$$(6.2)\quad L(xy)L(z)+L(yz)L(x)+L(zx)L(y) = L(x)L(yz)+L(y)L(zx)+L(z)L(xy).$$

これより (1) の等式を得る．
(2) 作用素の等式 (6.2) を $a \in A$ に作用させて

$$(xy)(za)+(yz)(xa)+(zx)(ya) = x\bigl((yz)a\bigr)+y\bigl((zx)a\bigr)+z\bigl((xy)a\bigr).$$

積は可換であることに注意して，これを任意の $z \in A$ に作用する作用素の等式と解釈すると

$$L(xy)L(a)+L(ax)L(y)+L(ya)L(x) = L(x)L(a)L(y)+L(y)L(a)L(x)+L\bigl((xy)a\bigr).$$

a を z と書き換えれば (2) を得る．
(3) (2) の等式で x, z を入れ替えて，その結果から (2) の等式を引くと

$$\begin{aligned} L\bigl(x(yz)-(xy)z\bigr) &= -L(z)L(x)L(y)-L(y)L(x)L(z)+L(x)L(z)L(y)+L(y)L(z)L(x) \\ &= [L(x), L(z)]L(y)+L(y)[L(z), L(x)] \\ &= \bigl[[L(x), L(z)], L(y)\bigr] \end{aligned}$$

となって (3) の等式を得る． □

A 上の線型作用素の全体を $L(A)$ で表し

$$\mathrm{Der}(A) := \{D \in L(A)\,;\ D(xy) = (Dx)y + x(Dy) \quad (\forall x, y \in A)\}$$

とおく．$\mathrm{Der}(A)$ の元は A の **derivation** と呼ばれる．次は定義より容易にわかる：$D \in L(A)$ のとき，

$$(6.3)\qquad D \in \mathrm{Der}(A) \iff L(Dx) = [D, L(x)] \quad (\forall x \in A).$$

補題 6.4. $x, y \in A$ のとき，$[L(x), L(y)] \in \mathrm{Der}(A)$.

証明． $D=[L(x),L(y)]$ とおく．このとき任意の $a\in A$ に対して

$$\begin{aligned}[D,L(a)]&=\big[[L(x),L(y)],L(a)\big]=L\big(x(ay)-(xa)y\big) \qquad (\text{補題 } 6.3\ (3))\\ &=L\big(x(ya)-y(xa)\big)=L\big([L(x),L(y)]a\big)=L(Da)\end{aligned}$$

となって，(6.3) より，$D\in \mathrm{Der}(A)$ である． □

次に A に 3 項積を導入しよう：

$$\{x,y,z\}:=(xy)z+x(yz)-y(xz). \tag{6.4}$$

(6.4) の右辺は

$$\big(L(xy)+[L(x),L(y)]\big)z$$

と書けることに注意．

命題 6.5. A は 3 項積 (6.4) で JTS になる．

証明． まず，Jordan 積の可換性から $\{x,y,z\}=\{z,y,x\}$ は明らか．JT identity を示そう．$a,b\in A$ とし，$D_{a,b}:=[L(a),L(b)]$ とおく．補題 6.4 より $D_{a,b}\in \mathrm{Der}(A)$ である．従って，3 項積の定義 (6.4) より，任意の $x,y,z\in A$ に対して

$$D_{a,b}\big(\{x,y,z\}\big)=\{D_{a,b}x,y,z\}+\{x,D_{a,b}y,z\}+\{x,y,D_{a,b}z\} \tag{6.5}$$

がわかる．次を示そう：

$$L(a)\{x,y,z\}=\{L(a)x,y,z\}-\{x,L(a)y,z\}+\{x,y,L(a)z\}. \tag{6.6}$$

まず，(6.6) の右辺は，次の作用素を z に作用させたものであることに注意する：

$$\begin{aligned}&L\big((ax)y\big)+[L(ax),L(y)]-L\big(x(ay)\big)\\ &\qquad -[L(x),L(ay)]+L(xy)L(a)+[L(x),L(y)]L(a).\end{aligned} \tag{6.7}$$

また (6.6) の左辺は，次の作用素を z に作用させたものである：

$$L(a)L(xy)+L(a)[L(x),L(y)]. \tag{6.8}$$

等式 (6.8) から等式 (6.7) を引くと

$$\begin{aligned}&L\big(x(ay)-(ax)y\big)+\big[L(a),L(x),L(y)\big]\\ &\qquad -[L(xy),L(a)]-[L(ya),L(x)]-[L(ax),L(y)].\end{aligned} \tag{6.9}$$

補題 6.3 (3) より，(6.9) の 1 行目は 0 であり，同じ補題 (1) より，(6.9) の 2 行目も 0 である．ゆえに (6.6) が証明された．

$D_{b,a} = -D_{a,b}$ であることに注意すれば，(6.5) と (6.6) より

$$\begin{aligned}\{a, b, \{x, y, z\}\} &= L(ab)\bigl(\{x, y, z\}\bigr) + D_{a,b}\bigl(\{x, y, z\}\bigr) \\ &= \{\{a, b, x\}, y, z\} - \{x, \{b, a, y\}, z\} + \{x, y, \{a, b, z\}\}\end{aligned}$$

が示されたことになる． □

注意 6.6. A が単位元 e を持つとき，元の Jordan 積は

$$xy = \{x, e, y\}\,(= \{x, y, e\} = \{e, x, y\})$$

で復元される．

命題 6.7. $(V, \{\cdot, \cdot, \cdot\})$ を JTS とし，$a \in V$ を固定する．

$$x \underset{a}{\cdot} y := \{x, a, y\}$$

で V に積を定義すると，この積で V は Jordan 代数になる．

証明. まず $x \underset{a}{\cdot} y = y \underset{a}{\cdot} x$ は明らか．$L_a(x)y := x \underset{a}{\cdot} y\ (x, y \in V)$ とおく．明らかに $L_a(x) = x \,\square\, a$ である．証明すべきは，$[L_a(x),\, L_a(x \underset{a}{\cdot} x)] = 0$ である．そのためには

$$P_a(x) := 2L_a(x)^2 - L_a(x \underset{a}{\cdot} x)$$

とおいて，$[L_a(x), P_a(x)] = 0$ を示せばよい．さて定義より

$$P_a(x) = 2(x \,\square\, a)^2 - \bigl(P(x)a\bigr) \,\square\, a = P(x)P(a) \quad \text{（命題 2.2 (2)）}.$$

ゆえに

$$[L_a(x), P_a(x)] = [x \,\square\, a,\ P(x)P(a)] = P(x)P(a)(x \,\square\, a) - (x \,\square\, a)P(x)P(a)$$

であるが，最右辺において，命題 2.2 (1) を 2 回使うことにより

$$P(x)P(a)(x \,\square\, a) = P(x)(a \,\square\, x)P(a) = (x \,\square\, a)P(x)P(a)$$

がわかるので，$[L_a(x),\, P_a(x)] = 0$ である． □

定義. Jordan 代数 A が **Euclid 型** であるとは，A に内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ が存在して，$\langle xy \,|\, z \rangle = \langle x \,|\, yz \rangle$ が任意の $x, y, z \in A$ に対して成り立つときをいう．このような内積を結合的な内積という．

注意 6.8. Jordan 積の可換性から，$\langle\, x \,|\, y \,\rangle$ が結合的な内積ならば

$$\langle\, L(y)x \,|\, z \,\rangle = \langle\, xy \,|\, z \,\rangle = \langle\, x \,|\, yz \,\rangle = \langle\, x \,|\, L(y)z \,\rangle \qquad (*)$$

となるから，乗法作用素 $L(y)$ は結合的な内積に関して，自己共役である．逆に，乗法作用素がつねに自己共役となる内積があれば，その内積は結合的である（$(*)$ で両端が等しいので，真ん中の等号が導かれる）．

以下 $(V, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ を正定値 JTS とし，$c \in V$ を non-zero tripotent とする．$V = V_0(c) \oplus V_{\frac{1}{2}}(c) \oplus V_1(c)$ を c についての V の Peirce 分解とする．

命題 6.9. (1) $V_1(c)$ は $x \underset{c}{\cdot} y := \{x, c, y\}$ による積で単位元 c を持つ Jordan 代数になっている．
(2) $A(c) := \{x \in V_1(c) \;;\; P(c)x = x\}$ は $V_1(c)$ の Jordan 部分代数で，Euclid 型になっている．

証明. (1) 乗積ルール (3.1) より，積 $\underset{c}{\cdot}$ に関して $V_1(c)$ は閉じている．また $x \in V_1(c)$ のとき，$x \underset{c}{\cdot} c = \{x, c, c\} = x$ であるから，c は単位元である．
(2) を示すために次の補題を用意する．

補題 6.10. $P(c)$ を $V_1(c)$ に制限すると，$P(c)$ は Jordan 代数としての involutive な自己同型になっている．

証明. $x \in V_1(c)$ とする．

$$\begin{aligned} P(c)(x \underset{c}{\cdot} x) &= P(c)\big(\{x, c, x\}\big) = P(c)P(x)c \\ &= P(c)P(x)P(c)c \overset{(*)}{=} P(P(c)x)c \\ &= \{P(c)x, c, P(c)x\} = (P(c)x) \underset{c}{\cdot} (P(c)x). \end{aligned}$$

ただし $(*)$ で補遺に述べる等式（命題 6.12）を使った．ゆえに $P(c)(x \underset{c}{\cdot} x) = (P(c)x) \underset{c}{\cdot} (P(c)x)$ が成り立つが，polarize して（さらに元 $y \in V_1(c)$ をとって，今得られた等式で x の代わりに $x + y$ とおいて展開して整理すると），

$$P(c)(x \underset{c}{\cdot} y) = (P(c)x) \underset{c}{\cdot} (P(c)y)$$

を得る．$P(c)$ が $V_1(c)$ 上 involutive であることは既知（系 3.3）． □

この補題を踏まえて，$x \in V_1(c)$ に対して，$x^* := P(c)x$ とおく（例 3.4 も参照）．これにより，Jordan 代数としての自己同型で involutive なものの固定点集合である $A(c)$ は $V_1(c)$ の Jordan 部分代数になっている．最後に，もともと V に入っている

内積 $\langle x \,|\, y \rangle = \mathrm{tr}(x \,\square\, y)$ を $A(c)$ に制限することで，結合的な内積を得ることを示そう．そのために次の補題を用意する．

補題 6.11. $x \in V_1(c)$ のとき，$x \,\square\, c = c \,\square\, x^*$.

証明. 任意に $y \in V$ をとって，$\{x, c, y\} = \{c, x^*, y\}$ を示そう．
(i) $y \in V_0(c)$ のとき．補題 5.1 より，$V_0(c) \,\square\, V_1(c) = 0$ であるから，

$$\{x, c, y\} = 0 = \{c, x^*, y\}.$$

(ii) $y \in V_{\frac{1}{2}}(c)$ のとき

$$\begin{aligned}\{x, c, y\} &= \{\{c, x^*, c\}, c, y\} \\ &= 2\{c, x^*, \{y, c, c\}\} - \{c, \{c, y, x^*\}, c\} \\ &= \{c, x^*, y\} \qquad (\because\ \{c, y, x^*\} \in \{V_1(c), V_{\frac{1}{2}}(c), V_1(c)\} = \{0\}).\end{aligned}$$

(iii) 最後に $y \in V_1(c)$ とする．このとき

$$\begin{aligned}\{c, x^*, y\} &= \{c, \{c, x, c\}, y\} \\ &= -\{x, c, \{c, c, y\}\} + \{\{x, c, c\}, c, y\} + \{c, c, \{x, c, y\}\} \\ &= -\{x, c, y\} + \{x, c, y\} + \{x, c, y\} \\ &= \{x, c, y\}\end{aligned}$$

となって証明終わり． □

命題 6.9 (2) の証明. $x \in A(c)$ のとき，$x^* = x$ および $L_c(x) = x \,\square\, c$ と補題 6.11 より

$$L_c(x)^* = (x \,\square\, c)^* = c \,\square\, x = c \,\square\, x^* = x \,\square\, c = L_c(x).$$

ゆえに Jordan 代数 $A(c)$ は Euclid 型である． □

§6 の補遺

命題 6.12. 一般の JTS $(V, \{\cdot, \cdot, \cdot\})$ において，次の公式（基本公式と呼ばれる）が成立する：任意の $x, y \in V$ に対して

$$P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x).$$

証明． $x, y, z \in V$ とする．定義と JTS identity より

$$\begin{aligned}P(P(x)y)z &= \{P(x)y, z, P(x)y\} = \{P(x)y, z, \{x, y, x\}\}\\&= \{\{P(x)y, z, x\}, y, x\} - \{x, \{z, P(x)y, y\}, x\} + \{x, y, \{P(x)y, z, x\}\}\\&= 2\{x, y, \{P(x)y, z, x\}\} - P(x)(\{y, P(x)y, z\}).\end{aligned}$$

ここで命題 2.2 (1) を 2 回使って

$$\begin{aligned}\{x, y, \{P(x)y, z, x\}\} &= \{x, y, P(P(x)y, x)z\} = \{x, y, P(x)(\{y, x, z\})\}\\&= P(P(x)u, x)y \qquad (u := \{y, x, z\})\\&= P(x)(u \,\square\, x)y = P(x)(\{y, x, \{y, x, z\}\}).\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}P(P(x)y)z &= 2P(x)(\{y, x, \{y, x, z\}\}) - P(x)(\{y, P(x)y, z\})\\&= P(x)\bigl\{2(y \,\square\, x)^2 - y \,\square\, (P(x)y)\bigr\}z\\&= P(x)P(y)P(x) \qquad \text{（命題 2.2 (2)）}.\end{aligned}$$

よって証明終わり． $\square$

§7. JTS と Jordan 代数の表現

以下 $(V, \{\cdot, \cdot, \cdot\})$ を正定値実 JTS とする．内積は $\langle v_1 \,|\, v_2 \rangle := \mathrm{tr}(v_1 \,\square\, v_2)$ で与える．また $P(x)y = \{x, y, x\}$ を思い出しておく．

極大な tripotent $c \in V$ を一つとって固定し，その Peirce 分解を $V = V_1(c) \oplus V_{\frac{1}{2}}(c)$ とする（補題 5.3 より $V_0(c) = \{0\}$ に注意）．命題 6.9 より，$V_1(c)$ は積

$$a \underset{c}{\cdot} b := \{a, c, b\}$$

により，c を単位元とする Jordan 代数になっている．さらに $a \in V_1(c)$ に対して，$a^* := P(c)a$ とおくと，$a \mapsto a^*$ は Jordan 代数 としての自己同型写像であり，$a^{**} = a$ である（補題 6.10）．その固定点集合を $A(c)$ とする：

$$A(c) := \{a \in V_1(c) \,;\, a^* = a\}.$$

$A(c)$ は c を単位元とする Euclid 型の Jordan 代数である（命題 6.9）．

各 $a \in V_1(c)$ に対して，$V_{\frac{1}{2}}(c)$ 上の作用素 $\varphi(a)$ を

$$\varphi(a)x := 2\{a, c, x\} \qquad (x \in V_{\frac{1}{2}}(c)) \tag{7.1}$$

で定義する．乗積ルール (3.1) より

$$\{V_1(c), V_1(c), V_{\frac{1}{2}}(c)\} \subset V_{\frac{1}{2}}(c)$$

であるから，確かに $\varphi(a) \in \mathrm{End}(V_{\frac{1}{2}}(c))$ を定義している．さらに，$\varphi(c)x = 2\{c, c, x\} = x$ より，$\varphi(c) = I$ である．また，補題 6.11 より

$$\varphi(a)x = 2\{c, a^*, x\} \qquad (a \in V_1(c),\ x \in V_{\frac{1}{2}}(c)) \tag{7.2}$$

となることにも注意しておこう．

命題 7.1． 写像 $a \mapsto \varphi(a) \in \mathrm{End}(V_{\frac{1}{2}}(c))$ は Jordan 代数 $V_1(c)$ の $*$ 表現になっている：すなわち，$a, b \in V_1(c)$ のとき

$$\begin{cases} \varphi(a \underset{c}{\cdot} b) = \frac{1}{2}\bigl(\varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b)\varphi(a)\bigr) \\ \varphi(a)^* = \varphi(a^*) \qquad (\text{左辺の } * \text{ は内積 } \langle\cdot|\cdot\rangle \text{ に関する作用素の共役}) \end{cases}$$

この証明のために次の補題を用意する（(7.1) を一般化する式になっている）：

補題 7.2． $a, b \in V_1(c)$ かつ $x \in V_{\frac{1}{2}}(c)$ のとき

$$\{a, b^*, x\} = \frac{1}{2}\varphi(a)\varphi(b)x.$$

証明． $a = P(c)a^* = \{c, a^*, c\}$ であるから

$$\begin{aligned} \{a, b^*, x\} &= \{x, b^*, \{c, a^*, c\}\} \\ &= 2\{\{x, b^*, c\}, a^*, c\} - \{c, \{b^*, x, a^*\}, c\}. \end{aligned}$$

ここで乗積ルール (3.1) より $\{b^*, x, a^*\} \in \{V_1(c), V_{\frac{1}{2}}(c), V_1(c)\} = \{0\}$ であるから，(7.2) より

$$\{a, b^*, x\} = 2\{\{x, b^*, c\}, a^*, c\} = \tfrac{1}{2}\varphi(a)\varphi(b)x$$

となって証明終わり． □

命題 7.1 の証明． まず表現であること．定義より

$$\begin{aligned} \varphi(a)\varphi(b)x &= 4\{a, c, \{b, c, x\}\} \\ &= 4\{\{a, c, b\}, c, x\} - 4\{b, \{c, a, c\}, x\} + 4\{b, c, \{a, c, x\}\} \\ &= 2\,\varphi(a \underset{c}{\cdot} b)x - 4\{b, a^*, x\} + \varphi(b)\varphi(a)x \\ &= 2\,\varphi(a \underset{c}{\cdot} b)x - \varphi(b)\varphi(a)x. \end{aligned}$$

一番最後の等号は補題 7.2 による．次に $x, y \in V_{\frac{1}{2}}(c)$ のとき

$$\begin{aligned}\langle\, \varphi(a)x \,|\, y \,\rangle &= 2\langle\, (a \,\square\, c)x \,|\, y \,\rangle = 2\langle\, x \,|\, (c \,\square\, a)y \,\rangle \\ &= 2\langle\, x \,|\, (a^* \,\square\, c)y \,\rangle \qquad \text{（補題 6.11）} \\ &= \langle\, x \,|\, \varphi(a^*)y \,\rangle.\end{aligned}$$

これは $\varphi(a)^* = \varphi(a^*)$ であることを示している． □

さて $A(c)$ は結合的内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を持つ Euclid 型の Jordan 代数であるから

$$\Omega := \mathrm{Int}\{a \underset{c}{\cdot} a\,;\ a \in A(c)\} \qquad \text{（2 乗で表される元全体の内部）}$$

とおくと，Ω は内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関して自己双対な開凸錐になっている：

(0) $A(c)$ の開集合である．

(1) 凸集合である；$a, b \in \Omega \implies \alpha a + (1-\alpha)b \in \Omega$ for $\forall \alpha \in [0,1]$.

(2) 錐である；$a \in \Omega \implies \lambda a \in \Omega$ for $\forall \lambda > 0$.

(3) 内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関して自己双対である；

$$\Omega^* := \bigl\{b \in A(c)\,;\ \langle\, b \,|\, a \,\rangle > 0 \ \ (\forall a \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})\bigr\}$$

（内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する Ω の双対錐という）

とおくとき， $\Omega^* = \Omega$ となる．

事実. (1) Ω は $A(c)$ の可逆元全体の集合の中で，単位元を含む連結成分に等しい．
(2) Ω の閉包 $\overline{\Omega}$ について次が成立する：

$$\overline{\Omega} = \{a \underset{c}{\cdot} a\,;\ a \in A(c)\} = \{a \in V_1(c)\,;\ \langle\, a \,|\, b \,\rangle \geqq 0 \ \ (\forall b \in \overline{\Omega})\} \tag{7.3}$$

命題 7.3. $a \in \Omega$ ならば，$\varphi(a)$ は自己共役で正定値である．

証明. $a \in A(c)$ ならば $a^* = a$ より，命題 7.1 より $\varphi(a)$ は自己共役である．$a \in \overline{\Omega}$ とすると，(7.3) より，適当な $b \in A(c)$ を用いて $a = b \underset{c}{\cdot} b$ と書ける．このとき，命題 7.1 より

$$\varphi(a) = \varphi(b \underset{c}{\cdot} b) = \varphi(b)^2$$

となって，$\varphi(a)$ は半正定値である．さらに $a \in \Omega$ とすると，a は $A(c)$ の可逆元なので，b も可逆元である．ゆえに $\varphi(b)$ も可逆となるから，$\varphi(a)$ は正定値である． □

$x, y \in V_{\frac{1}{2}}(c)$ を固定するとき，$A(c) \ni a \mapsto \langle\, \varphi(a)x \,|\, y \,\rangle \in \mathbb{R}$ は $A(c)$ 上の線型形式であるから，一意的に $Q(y, x) \in A(c)$ が存在して，

$$\langle\, \varphi(a)x \,|\, y \,\rangle = \langle\, a \,|\, Q(y, x) \,\rangle \qquad (\forall a \in A(c))$$

となる．明らかに $y, x \mapsto Q(y, x) \in A(c)$ は双線型である．次の補題では，乗積ルール (3.1) より，$\{y, x, c\} \in \{V_{\frac{1}{2}}(c), V_{\frac{1}{2}}(c), V_1(c)\} \subset V_1(c)$ に注意.

命題 7.4.　$x, y \in V_{\frac{1}{2}}(c)$ とする.
(1) $Q(y, x) = \{y, x, c\} + \{x, y, c\}$.
(2) $Q(x, y) = Q(y, x)$.
(3) $Q(x, x) \in \overline{\Omega}$ であり,「$Q(x, x) = 0 \iff x = 0$」である.

証明.　まず，$x, y \in V_{\frac{1}{2}}(c)$ のとき，$\{x, y, c\}^* = \{y, x, c\}$ を示そう．定義より

$$\begin{aligned}\{x, y, c\}^* &= P(c)\{x, y, c\} = \{c, \{x, y, c\}, c\}\\ &= -\{y, x, \{c, c, c\}\} + 2\{\{y, x, c\}, c, c\}\\ &= \{y, x, c\}.\end{aligned}$$

(1) $a \in A(c)$ かつ $x, y \in V_{\frac{1}{2}}(c)$ とするとき

$$\begin{aligned}\langle\, \varphi(a)x \,|\, y \,\rangle &= 2\langle\, (a \,\Box\, c)x \,|\, y \,\rangle = 2\langle\, (x \,\Box\, c)a \,|\, y \,\rangle\\ &= 2\langle\, a \,|\, (c \,\Box\, x)y \,\rangle = 2\langle\, a \,|\, \{y, x, c\} \,\rangle.\end{aligned}$$

$\varphi(a)^* = \varphi(a)$ であるから，上の式において，$\langle\, \varphi(a)x \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, \varphi(a)y \,\rangle = \langle\, \varphi(a)y \,|\, x \,\rangle$ となるので，

$$\langle\, \varphi(a)x \,|\, y \,\rangle = \frac{1}{2}\big(\langle\, \varphi(a)x \,|\, y \,\rangle + \langle\, \varphi(a)y \,|\, x \,\rangle\big) = \langle\, a \,|\, \{y, x, c\} \,\rangle + \langle\, a \,|\, \{x, y, c\} \,\rangle.$$

証明の冒頭で示したことから，

$$\{y, x, c\} + \{x, y, c\} = \{y, x, c\} + \{y, x, c\}^* \in A(c)$$

であるから，$Q(y, x) = \{y, x, c\} + \{x, y, c\}$.
(2) (1) より明らか.
(3) $b \in \overline{\Omega}$ とすると，定義と命題 7.3 より

$$\langle\, Q(x, x) \,|\, b \,\rangle = \langle\, \varphi(b)x \,|\, x \,\rangle \geqq 0.$$

(7.3) より，$Q(x,x) \in \overline{\Omega}$ となる．さらにもし $Q(x,x)=0$ ならば，上で $b=c$（$A(c)$ の単位元）とおくと，$\varphi(c)=I$ より

$$0 = \langle\, Q(x,x) \,|\, c \,\rangle = \|x\|^2.$$

これより $x=0$ が出る．

例 7.5. $V = \mathrm{Mat}(p\times q,\mathbb{R})$ $(p<q)$ のとき．3項積は $\{x,y,z\} = \frac{1}{2}(x{}^tyz + z{}^tyx)$．極大 tripotent として，$c := \big(\, I_p \,\big|\, O \,\big) \in V$ をとって固定する．対応する V の Peirce 分解は

$$V_1(c) = \big(\, \mathrm{Mat}(p\times p,\mathbb{R}) \,\big|\, O \,\big), \qquad V_{\frac{1}{2}}(c) = \big(\, O \mid \mathrm{Mat}(p\times(q-p),\mathbb{R}) \,\big).$$

例 3.4 より，$a \in \mathrm{Mat}(p\times p,\mathbb{R})$ のとき

$$\big(\, a \mid O \,\big)^* = \big(\, {}^ta \mid O \,\big)$$

であるから

$$A(c) = \big(\, \mathrm{Sym}(p\times p,\mathbb{R}) \,\big|\, O \,\big).$$

$a,b \in \mathrm{Mat}(p\times p)$ のとき

$$\big(\, a \,\big|\, O \,\big){}^t\big(\, I_p \,\big|\, O \,\big)\big(\, b \,\big|\, O \,\big) = \big(\, a \,\big|\, O \,\big)\begin{pmatrix} I_p \\ \hline O \end{pmatrix}\big(\, b \,\big|\, O \,\big) = a\,\big(\, b \,\big|\, O \,\big) = \big(\, ab \,\big|\, O \,\big)$$

であるから，$V_1(c) \equiv \mathrm{Mat}(p\times p,\mathbb{R})$ に入る Jordan 代数構造は例 6.1 におけるものと同じである．従ってまた，$A(c) \equiv \mathrm{Sym}(p,\mathbb{R})$ に入る Jordan 代数構造は例 6.2 におけるものと同じ．ゆえに，$\Omega = \mathrm{Sym}(p,\mathbb{R})^{++}$（$^{++}$ は正定値なものを表す）となる．

$a \in \mathrm{Mat}(p\times p,\mathbb{R})$，$x \in \mathrm{Mat}(p\times(q-p))$ とするとき

$$\begin{aligned}
&\big(\, a \,\big|\, O \,\big){}^t\big(\, I_p \,\big|\, O \,\big)\big(\, O \,\big|\, x \,\big) + \big(\, O \,\big|\, x \,\big){}^t\big(\, I_p \,\big|\, O \,\big)\big(\, a \,\big|\, O \,\big) \\
&\quad = \big(\, a \,\big|\, O \,\big)\begin{pmatrix} I_p \\ \hline O \end{pmatrix}\big(\, O \,\big|\, x \,\big) + \big(\, O \,\big|\, x \,\big)\begin{pmatrix} I_p \\ \hline O \end{pmatrix}\big(\, a \,\big|\, O \,\big) \\
&\quad = \big(\, O \,\big|\, ax \,\big).
\end{aligned}$$

すなわち，Jordan 代数 $A(c)$ の表現 φ は，$a \in \mathrm{Sym}(p,\mathbb{R})$ を左から $\mathrm{Mat}(p\times(q-p),\mathbb{R})$ の行列に掛けるという作用と同じになる．

最後に $x, y \in \mathrm{Mat}(p \times (q-p), \mathbb{R})$ のとき

$$\begin{aligned}
&\left(\, O \mid y \,\right)^t\!\left(\, O \mid x \,\right)\left(\, I_p \mid O \,\right) + \left(\, I_p \mid O \,\right)^t\!\left(\, O \mid x \,\right)\left(\, O \mid y \,\right) \\
&\quad = \left(\, O \mid y \,\right)\begin{pmatrix} O \\ \hline {}^t x \end{pmatrix}\left(\, I_p \mid O \,\right) + \left(\, I_p \mid O \,\right)\begin{pmatrix} O \\ \hline {}^t x \end{pmatrix}\left(\, O \mid y \,\right) \\
&\quad = \left(\, y\,{}^t x \mid O \,\right)
\end{aligned}$$

であるから，

$$Q(y, x) = \left(\, \tfrac{1}{2}(y\,{}^t x + x\,{}^t y) \;\middle|\; O \,\right).$$

従って，

$$Q(x, x) = \left(\, x\,{}^t x \mid O \,\right).$$

$x = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_p \end{pmatrix}$ （各 $\boldsymbol{x}_j$ は横ベクトル $\in \mathbb{R}^{q-p}$） と表すと

$$x\,{}^t x = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_p \end{pmatrix}({}^t\boldsymbol{x}_1, \ldots, {}^t\boldsymbol{x}_p) = \left(\boldsymbol{x}_i\,{}^t\boldsymbol{x}_j\right) \qquad ((i,j)\text{ 成分は } \boldsymbol{x}_i \text{ と } \boldsymbol{x}_j \text{ の標準内積}).$$

従って $x\,{}^t x$ は，ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ から得られるグラム行列に他ならない．もちろん $x\,{}^t x$ は半正定値であり,「$x\,{}^t x = 0 \iff x = 0$」である．

§8. JTS と実 Siegel 領域

以下 $(V, \{\cdot, \cdot, \cdot\})$ を正定値 JTS とし，その正定値内積を $\langle\, v_1 \,|\, v_2 \,\rangle := \mathrm{tr}(x \,\square\, y)$ とする．V の極大 tripotent c を一つ固定し，対応する V の Peirce 分解を $V = V_1(c) \oplus V_{1/2}(c)$ とする．$V_1(c)$ は

$$a \underset{c}{\cdot} b := \{a, c, b\} =: L_c(a) b$$

で c を単位元とする Jordan 代数をなし，$a \mapsto a^* := P(c)a$ は $V_1(c)$ の involutive な JA 自己同型であった．従って

$$A(c) := \{a \in V_1(c)\ ;\ a^* = a\}$$

は $V_1(c)$ の Jordan 部分代数であるが，Euclid 型になっている．

$$\varphi(a)x := 2\{a, c, x\} \qquad (a \in V_1(c),\, x \in V_{1/2}(c))$$

とおくと，$\varphi : V_1(c) \to \mathrm{End}(V_{1/2}(c))$ は Jordan 代数 $V_1(a)$ の $*$ 表現である．

$$\Omega := \mathrm{int}\{a \underset{c}{\cdot} a\ ;\ a \in A(c)\}$$

は $A(c)$ の自己双対な開凸錐である．

$$\langle\, \varphi(a)x \,|\, y\,\rangle = \langle\, a \,|\, Q(y,x)\,\rangle \qquad (a \in A(c),\, x, y \in V_{1/2}(c))$$

で $Q(y,x) \in A(c)$ を定めると

$$Q(y,x) = \{y,x,c\} + \{x,y,c\}$$

となり，さらに $Q(x,x) \in \overline{\Omega}$ $(\forall x \in V_{1/2}(c))$ である．

定義． 上記の Ω と Q を用いて得られる領域

$$D(\Omega,Q) := \{x + a\,;\, x \in V_{1/2}(c),\, a \in A(c),\, a - Q(x,x) \in \Omega\} \subset V_{1/2}(c) \oplus A(c)$$

を JTS $(V, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ の極大 tripotent c に付随する実 **Siegel** 領域と呼ぶ．

例 8.1. $\mathbb{R}^{n+1}$ を $1 \times (n+1)$ 行列の全体

$$\mathrm{Mat}(1,\, n+1) = \{X = \big(\, \xi \mid \boldsymbol{x} \,\big)\,;\, \xi \in \mathbb{R},\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\ (\text{横ベクトル})\}$$

と見る．例 7.5 より，$\Omega = \mathbb{R}_{>0}$（正の実数全体）であり，

$$Q(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}.$$

従って，

$$\begin{aligned} D(\Omega,Q) &= \{\big(\xi \mid \boldsymbol{x}\,\big)\,;\, \xi - \|\boldsymbol{x}\|^2 > 0\} \\ &= \{(x_0, x_1, \ldots, x_n)\,;\, x_0 > x_1^2 + \cdots + x_n^2\}. \end{aligned}$$

特に平面上での放物線の「上部」 $\{(x,y)\,;\, x > y^2\}$ は JTS に付随する実 Siegel 領域である．

命題 8.2. $D(\Omega,Q)$ は直線を含まない凸領域である．

証明． まず開集合であることは明らかであろう．
(1) 次に $\overline{\Omega}$ は $A(c)$ の直線を含まないことを示そう．$a_0, a \in A(c)$，$a \neq 0$ として，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$a_0 + ta \in \overline{\Omega}$ となったとする．(7.3) より，任意の $b \in \overline{\Omega}$ に対して，

$$\langle\, a_0 + ta \,|\, b\,\rangle \geqq 0. \tag{8.1}$$

従って，任意の $t > 0$ に対して，$t^{-1}\langle\, a_0 + ta \,|\, b\,\rangle \geqq 0$．ここで $t \to \infty$ とすると，$\langle\, a \,|\, b\,\rangle \geqq 0$ を得る．再び (7.3) より，$a \in \overline{\Omega}$ である．このとき，(8.1) で $b = a$ とおいて

$$\langle\, a_0 \,|\, a\,\rangle + t\|a\|^2 > 0$$

$a \neq 0$ であるから，これが任意の $t \in \mathbb{R}$ で成立することはない（$t < 0$ で絶対値が十分大きければ左辺は負である）．ゆえに矛盾が生じた．

さて命題の証明をしよう．$x_0, x \in V_{1/2}(a)$, $a_0, a \in A(c)$，$x + a \neq 0$ として，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$(x_0 + a_0) + t(x + a) \in D(\Omega, Q)$ とする．このとき

$$(a_0 + ta) - Q(x_0 + tx, x_0 + tx) \in \Omega. \tag{8.2}$$

Ω は錐であるから，任意の $t \neq 0$ に対して

$$\frac{1}{t^2}\bigl\{(a_0 + ta) - Q(x_0 + tx, x_0 + tx)\bigr\} \in \Omega.$$

$t \to \infty$ として，$-Q(x, x) \in \overline{\Omega}$．一方で $Q(x, x) \in \overline{\Omega}$ であるから，$Q(x, x) \neq 0$ ならば，$\overline{\Omega}$ は直線 $tQ(x, x)$ を含むことになる．ゆえに $Q(x, x) = 0$．命題 7.4 (3) より，$x = 0$ である．このとき，(8.2) は，$a_0 + ta - Q(x_0, x_0) \in \Omega$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ となる．これは，$a \neq 0$ より，Ω が直線を含むことを意味するから矛盾である．以上より，$D(\Omega, Q)$ は直線を含まないことがわかった．

(2) $D(\Omega, Q)$ が凸集合であることを示そう．$a + x, a' + x' \in D(\Omega, Q)$ とする．

$$a - Q(x, x) \in \Omega, \qquad a' - Q(x'x') \in \Omega \tag{8.3}$$

が成り立っている．このとき，任意の λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ に対して，

$$\lambda(a + x) + (1 - \lambda)(a' + x') \in D(\Omega, Q) \tag{8.4}$$

を示そう．

$$\begin{aligned}
&\lambda a + (1 - \lambda)a' - Q\bigl(\lambda x + (1 - \lambda)x',\, \lambda x + (1 - \lambda)x'\bigr)\\
&\quad = \lambda(a - Q(x, x)) + (1 - \lambda)\bigl(a' - Q(x', x')\bigr)\\
&\qquad\quad + \lambda(1 - \lambda)Q(x, x) + \lambda(1 - \lambda)Q(x', x') - \lambda(1 - \lambda)Q(x, x') - \lambda(1 - \lambda)Q(x', x)\\
&\quad = \lambda(a - Q(x, x)) + (1 - \lambda)\bigl(a' - Q(x', x')\bigr) + \lambda(1 - \lambda)Q(x - x',\, x - x').
\end{aligned}$$

(8.3) と Ω が凸であることより

$$\lambda(a - Q(x, x)) + (1 - \lambda)\bigl(a' - Q(x', x')\bigr) \in \Omega$$

そして $Q(x - x',\, x - x') \in \overline{\Omega}$ であるから

$$\lambda a + (1 - \lambda)a' - Q\bigl(\lambda x + (1 - \lambda)x',\, \lambda x + (1 - \lambda)x'\bigr) \in \Omega + \overline{\Omega} \subset \Omega$$

となるから，(8.4) が示せた．

凸集合であるから，連結であることは明らかである． □

$D(\Omega, Q)$ には群が推移的に作用していることを示そう．まず

$$G(\Omega) := \{g \in GL(A(c))\ ;\ g(\Omega) = \Omega\}$$

とする．Ω が自己双対であることから，$G(\Omega)$ は reductive な Lie 群（$g \in G(\Omega)$ ならば $g^* \in G(\Omega)$）である．$G(\Omega)$ が Ω に推移的に作用していることを見るためにさらに

$$P_c(a) := 2L_c(a)^2 - L_c(a \underset{c}{\cdot} a) \qquad (a \in A(c))$$

とおく．

命題 8.3. $a \in A(c)$ とする．
(1) $P_c(a^n) = P_c(a)^n$（ただし，$a^1 = a$, $a^n := a \underset{c}{\cdot} a^{n-1}$）.
(2) a が可逆元ならば $P_c(a) \in G(\Omega)$ で，$P_c(a^{-1}) = P_c(a)^{-1}$.
(3) $P_c(a)c = a^2$.

$\Omega = \{a \underset{c}{\cdot} a\ ;\ a \in A(c)$ は可逆$\}$ でもあるので，命題 8.3 の (3), (4) より，$G(\Omega)$ が Ω に推移的に働いていることがわかる．

例 8.4. Jordan 代数 $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ において考える．Jordan 積は $L(a)b := \frac{1}{2}(ab + ba)$ である．このとき

$$2L(a)^2 b - L(a^2)b = \frac{1}{2}\{a(ab + ba) + (ab + ba)a - a^b - ba^2\} = aba.$$

従って，上で導入した $P(a)$ はここでは，$P(a)b = aba$ という作用素になっている．

補題 8.5. $a, b \in A(c)$ かつ $x, y \in V_{1/2}(c)$ とする．
(1) $\varphi(P_c(b)a) = \varphi(b)\varphi(a)\varphi(b)$.
(2) $P_c(b)Q(y, x) = Q(\varphi(b)y, \varphi(b)x)$.

証明. (1) φ は Jordan 代数 $A(c)$ の表現であるから，$\varphi(L_c(b)a) = L_{\varphi(b)}\varphi(a)$（右辺は Jordan 代数 $\mathrm{Sym}(V_{1/2}(c)$ での演算）．結論は例 8.4 より従う．
(2) 作用素 $\varphi(b)$, $P_c(b)$ は自己共役であることに注意して，(1) より

$$\begin{aligned}\langle a \,|\, Q(\varphi(b)y, \varphi(b)x) \rangle &= \langle \varphi(a)\varphi(b)x \,|\, \varphi(b)y \rangle = \langle \varphi(b)\varphi(a)\varphi(b)x \,|\, y \rangle \\ &= \langle \varphi(P_c(b)a)x \,|\, y \rangle = \langle P_c(b)a \,|\, Q(y, x) \rangle \\ &= \langle a \,|\, P_c(b)Q(y, x) \rangle. \qquad \square\end{aligned}$$

5節で導入した V の JTS 自己同型の全体がなす群をここでは $\mathrm{Aut}_{\mathrm{JT}}(V)$ で表す．補題 5.7 より $\mathrm{Aut}_{\mathrm{JT}}(V)$ は V の直交群 $O(V)$ の閉部分群，従ってコンパクトである．

$$K := \{k \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{JT}}(V)\ ;\ kc = c\}$$

とおく．

補題 8.6. K は $V_1(c)$，$A(c)$ を不変にし，$K\big|_{V_1(c)} \subset \mathrm{Aut}_{\mathrm{JA}}(V_1(c))$ であり，$K\big|_{A(c)} \subset \mathrm{Aut}_{\mathrm{JA}}(A(c))$ である．従って，$K\big|_{A(c)} \subset G(\Omega)$ である．
(2) $k \in K$ とすると，任意の $x, y \in V_{1/2}(c)$ に対して，$kQ(x,y) = Q(kx, ky)$.

証明. $k \in K$ かつ $a \in V_1(c)$ のとき

$$\{c, c, ka\} = k\{c, c, a\} = ka.$$

これは $ka \in V_1(c)$ であることを示す．このとき，$a, b \in V_1(c)$ ならば

$$k(a \underset{c}{\cdot} b) = k\{a, c, b\} = \{ka, c, kb\} = (ka) \underset{c}{\cdot} (kb).$$

ゆえに $k\big|_{V_1(c)} \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{JA}}(V_1(c))$．さらに

$$(ka)^* = \{c, ka, c\} = k\{c, a, c\} = ka^*.$$

これより，$k(A(c)) \subset A(c)$ がわかる．そうすると，$k\big|_{A(c)} \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{JA}}(A(c))$ である．よって，$a \in A(c)$ のとき，$k(a \underset{c}{\cdot} a) = (ka) \underset{c}{\cdot} (ka)$ となるから，$k\big|_{A(c)} \in G(\Omega)$ である．
(2) 定義から

$$kQ(x,y) = k\{x, y, c\} + k\{y, x, c\} = \{kx, ky, c\} + \{y, x, c\} = Q(kx, ky). \qquad \square$$

例 8.7. 例 5.8 で，$V = \mathrm{Mat}(p \times q, \mathbb{R})$ のとき，$k_1 \in O(p)$, $k_2 \in O(q)$ に対して

$$T_{k_1,k_2} v = k_1 v k_2^{-1} \qquad (v \in V)$$

とおくと，$T_{k_1,k_2} \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{JT}}(V)$ であった．以下 $p < q$ とし，極大 tripotent $c := \begin{pmatrix} I_p \mid O \end{pmatrix}$ を考える．このとき

$$T_{k_1,k_2} c = c \iff k_2 = \begin{pmatrix} k_1 & O \\ O & k_3 \end{pmatrix} \quad (k_3 \in O(q-p)).$$

次に

$$H_Q := \left\{ h_{B,C}\ ;\ \begin{array}{l} B \in GL(V_{1/2}(c),\ C \in GL(\Omega), \\ C(Q(x,y)) = Q(Bx, By)\ (\forall x, y \in V_{1/2}(c)) \end{array} \right\}$$

とおく．明らかに H_Q は群をなす．そして補題 8.5 (2) と補題 8.6 (2) より

任意の $b \in \Omega$ に対して $h_{\varphi(b), P_c(b)} \in H_Q$，$k \in K$ ならば $h_{k,k} \in H_Q$.

さて，$\rho(h_{B,C})=C$ とおくと明らかに $\rho : H_Q \to G(\Omega)$ は群準同型である．以上より

系 8.8. $\rho(H_Q)$ は Ω に推移的に働く．

各 $y \in V_{1/2}(c)$ に対して $n_y \in \mathrm{Aff}(V_{1/2} \oplus A(c))$ を

$$n_y(x+a) := (x+y) + (a + 2Q(x,y) + Q(y,y)) \tag{8.5}$$

で定義する．行列形で書くと

$$n_y = \left(\begin{array}{cc|c} I & O & y \\ 2Q(\cdot,y) & I & Q(y,y) \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

この行列が $\begin{pmatrix} x \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ に作用すると見ればよい．$V_{1/2}(c)$ を加法群と見るとき，$y \mapsto n_y$ は，簡単な計算でわかるように，群準同型である：$n_{y+y'} = n_y n_{y'}$．以下

$$N := \{n_y \,;\, y \in V_{1/2}(c)\}$$

とおく．N は可換群である．また，自然に $H_Q \hookrightarrow \mathrm{Aff}(V_{1/2}(c) \oplus A(c))$ とする：

$$h_{B,C} = \left(\begin{array}{cc|c} B & O & 0 \\ O & C & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

補題 8.9. N も H_Q も実 Siegel 領域 $D(\Omega, Q)$ を不変にする．

証明. $x + a \in D(\Omega, Q)$ とすると，$a - Q(x,x) \in \Omega$ である．
(1) $x' + a' = n_y(x+a)$ とおく．(8.5) より

$$x' = x + y, \qquad a' = a + 2Q(x,y) + Q(y,y).$$

ゆえに

$$\begin{aligned} a' - Q(x',x') &= a + 2Q(x,y) + Q(y,y) - Q(x+y, x+y) \\ &= a - Q(x,x) \in D(\Omega, Q). \end{aligned}$$

よって N は $D(\Omega, Q)$ を不変にする．
(2) $x' + a' = h_{B,C}(x+a)$ とおくと，$x' = Bx$, $a' = Ca$ である．ゆえに

$$a' - Q(x',x') = Ca - Q(Bx, Bx) = C(a - Q(x,x)) \in \Omega.$$

これは H_Q が $D(\Omega, Q)$ を不変にすることを示す． □

補題 8.10. $h_{B,c}n_y h_{B,C}^{-1} = n_{By}$. すなわち H_Q は N を正規化する.

証明. 次の行列の計算を実行すればよい：

$$\left(\begin{array}{cc|c} B & O & 0 \\ O & C & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} I & O & y \\ 2Q(\cdot,y) & I & Q(y,y) \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} B^{-1} & O & 0 \\ O & C^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$CQ(B^{-1}(\cdot),y) = Q(\cdot,By)$ 等に注意. □

補題 8.10 により，半直積 $N \rtimes H_Q$ を作る.

群演算	$(n_y, h_{B,C})(n_{y'}, h_{B',C'}) = (n_{y+By'},\, h_{BB',CC'})$
単位元	$(n_0, h_{I,I})$
逆元	$(n_y, h_{B,C})^{-1} = (n_{-B^{-1}y},\, h_{B^{-1},C^{-1}})$

命題 8.11. $N \rtimes H_Q$ は $D(\Omega,Q)$ に推移的に作用する.

証明. $c \in \Omega$ ゆえ，$0 + c \in D(\Omega,Q)$ である．定義より計算すると

$$n_y h_{B,C}(0+c) = (y, Cc + Q(y,y)).$$

これが任意の $x + a \in D(\Omega,Q)$ になれたらよい．連立方程式

$$\begin{cases} y = x \\ Cc + Q(y,y) = a \end{cases}$$

を解くことになるが，これは簡単に，$y = x, Cc = a - Q(x,x)$ となる．$a - Q(x,x) \in \Omega$ であるから，これを b^2 $(b \in \Omega)$ と書き，$h_{\varphi(b),P_c(b)} \in H_Q$ を考えると，$P_c(b)c = b^2 = a - Q(x,x)$ ゆえ，$n_x h_{\varphi(b),P_c(b)}(0+c) = x + a$ となる. □

§9. 多項式写像のなす Lie 代数

定義. L を実または複素ベクトル空間とする（無限次元でもよい）. 双線型写像 $[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$ が与えられているとする．L が **Lie** 代数であるとは，次の (1), (2) がみたされていること：

(1) $[y,x] = -[x,y]$ $(\forall x, y \in L)$,

(2) (**Jacobi identity**) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ $(\forall x,y,z \in L)$.

例 9.1. V 上の線型写像の全体 $\mathrm{End}(V)$ は，$[S,T] := ST - TS$ により，Lie 代数をなす．この Lie 代数を $\mathfrak{gl}(V)$ で表す.

以下しばらくは V を n 次元の実または複素ベクトル空間とする．V から V への k 次斉次多項式写像の全体を $\mathcal{P}_k(V)$ で表す．ただし，$p \in \mathcal{P}_k(V)$ であるとは，$e_1, \ldots, e_n$ を V の基底とし（固定），各 $x \in V$ を $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ と書いて V に座標を導入するとき，V 上の k 次斉次多項式函数（$x_1, \ldots, x_n$ の k 次斉次多項式）$p_1(x), \ldots, p_n(x)$ でもって

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) e_i$$

と表されることである．$\mathcal{P}_0(V) \equiv V$（定値函数），$\mathcal{P}_1(V) = \mathrm{End}(V)$ である．$\mathcal{P}(V) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k(V)$（代数直和）は，$V$ から V への多項式写像全体である．

さて，各 $p, q \in \mathcal{P}(V)$ に対して

$$(p \cdot q)(x) := \frac{d}{dt} p(x + tq(x))\Big|_{t=0}$$

とおく．成分で表示してみよう．

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) e_i, \quad q(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i(x) e_i \tag{9.1}$$

とおくとき，

$$(p \cdot q)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial x_i}(x) q_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_j}{\partial x_i}(x) q_i(x) \right) e_j. \tag{9.2}$$

これより，積 $p, q \mapsto p \cdot q$ が双線型であることは明らかであろう．この積 $p \cdot q$ の結合子を $[p, q, r]$ と書く．すなわち

$$[p, q, r] := p \cdot (q \cdot r) - (p \cdot q) \cdot r \qquad (p, q, r \in \mathcal{P}(V)).$$

補題 9.2. この結合子は右対称である．すなわち

$$[p, q, r] = [p, r, q].$$

証明. 各 p, q, r を (9.1) にように成分で書いておく．このとき，(9.2) より

$$\begin{aligned}
(p \cdot (q \cdot r))(x) &= \frac{d}{dt} p\left(x + t \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_i}(x) r_i(x) \right)\Bigg|_{t=0} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial x_j}(x) \frac{\partial q_j}{\partial x_i}(x) r_i(x).
\end{aligned}$$

同様にして

$$
\begin{aligned}
((p\cdot q)\cdot r)(x) &= \frac{d}{dt}(p\cdot q)(x+tr(x))\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p}{\partial x_i}(x+tr(x)))q_i(x+tr(x))\Big|_{t=0} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j\partial x_i}(x)r_j(x)q_i(x) + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial p}{\partial x_i}(x)\frac{\partial q_i}{\partial x_j}(x)r_j(x).
\end{aligned}
$$

以上より

$$
[p,q,r](x) = -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 p}{\partial x_j\partial x_i}(x)r_j(x)q_i(x)
$$

となって，これは q, r に関して対称である． □

次に交換子を考えよう： $[p,q] := p\cdot q - q\cdot p$．そうすると，(9.2) より

$$
\begin{aligned}
[p,q](x) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}(x)q_i(x) - \frac{\partial q}{\partial x_i}(x)p_i(x)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial p_j}{\partial x_i}(x)q_i(x) - \frac{\partial q_j}{\partial x_i}(x)p_i(x)\right)e_j.
\end{aligned}
$$

これは 2 個のベクトル場

$$
p(x)\frac{\partial}{\partial x} := \sum_{i=1}^{n}p_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad q(x)\frac{\partial}{\partial x} := \sum_{i=1}^{n}q_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}
$$

の Poisson 括弧積

$$
\left[p(x)\frac{\partial}{\partial x},\, q(x)\frac{\partial}{\partial x}\right] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(p_i(x)\frac{\partial q_j}{\partial x_i}(x) - q_i(x)\frac{\partial p_j}{\partial x_i}(x)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}
$$

の -1 倍に対応している．

命題 9.3. $\mathcal{P}(V)$ は交換子 $[p,q]$ で Lie 代数をなす（無限次元）．

証明. $[q,p] = -[p.q]$ は明らかなので，Jacobi 等式の成立を確かめればよい．定義より

$$
\begin{aligned}
&[p,[q,r]] + [q,[r,p]] + [r,[p,q]] \\
&\quad = p\cdot(q\cdot r - r\cdot q) - (q\cdot r - r\cdot q)\cdot p \\
&\qquad + q\cdot(r\cdot p - p\cdot r) - (r\cdot p - p\cdot r)\cdot q \\
&\qquad + r\cdot(p\cdot q - q\cdot p) - (p\cdot q - q\cdot p)\cdot r \\
&\quad = [p,q,r] + [q,r,p] + [r,p,q] - [p,r,q] - [q,p,r] - [r,q,p].
\end{aligned}
$$

補題 9.2 より，最後の項は 0 である． □

補題 9.4. (1) $[\mathcal{P}_k(V), \mathcal{P}_l(V)] \subset \mathcal{P}_{k+l-1}(V)$（ただし $\mathcal{P}_{-1}(V) := \{0\}$ とする）．
(2) Lie 代数として，$\mathcal{P}_1(V) = \mathfrak{gl}(V)$.
(3) $T \in \mathcal{P}_1(V)$，$b \in \mathcal{P}_0(V)$ のとき，$[T, b] = Tb$.

証明. (1) 表示式 (9.2) より明らかであろう．
(2) $S, T \in \mathcal{P}_1(V)$ のとき

$$(S \cdot T)(x) = \frac{d}{dt} S(x + tTx)\Big|_{t=0} = STx.$$

ゆえに $[S, T] = S \cdot T - T \cdot T = ST - TS$.
(3) 定義から

$$(T \cdot b)(x) = \frac{d}{dt} T(x + tb)\Big|_{t=0} = Tb.$$

明らかに $b \cdot T = 0$ であるから，$[T, b] = Tb$. □

以下 $(V, \{\cdot, \cdot, \cdot\})$ を正定値 JTS とする．作用素

$$(x \,\square\, y)z := \{x, y, z\}, \qquad P(x)y := \{x, y, x\}$$

を思い出しておこう．また V には内積 $\langle\, x \,|\, y \,\rangle := \mathrm{tr}(x \,\square\, y)$ が入っている．各 $b \in V$ に対して

$$p_b(x) := P(x)b = \{x, b, x\} \qquad (x \in V)$$

とおく．明らかに $p_b \in \mathcal{P}_2(V)$ であり，対応 $V \ni b \mapsto p_b \in \mathcal{P}_2(V)$ は線型である．

補題 9.5. 対応 $V \ni b \mapsto p_b \in \mathcal{P}_2(V)$ は単射である．

証明. $p_b = 0$ とすると，任意の $x \in V$ に対して，$\{x, b, x\} = 0$. 任意に $y \in V$ を持ってきて，x の代わりに $x + y$ と置くことにより，$\{x, b, y\} = 0$ となる（3 項積は第 1 変数と第 3 変数に関して対称であるので）．ゆえに $x \,\square\, b = 0$ となり，これより $\langle\, x \,|\, b \,\rangle = \mathrm{tr}(x \,\square\, b) = 0$ $(\forall x)$ が出るから，$b = 0$ である． □

補題 9.6. $a, b \in V$ のとき，$[p_b, a] = 2a \,\square\, b$.

証明. 定義より，$x \in V$ のとき

$$\begin{aligned}[p_b, a](x) &= \frac{d}{dt} p_b(x + ta)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\{x + ta, b, x + ta\}\Big|_{t=0} \\ &= 2\{a, b, x\} = 2(a \,\square\, b)x\end{aligned}$$

となって証明終わり． □

定義.　$\mathrm{End}(V)$ の部分空間 $\mathfrak{str}(V)$ を次で定義する：

$$\mathfrak{str}(V) := \left\{ T \in \mathrm{End}(V)\ ;\ \begin{array}{r} T\{x,y,z\} = \{Tx,y,z\} - \{x,T^*y,z\} + \{x,y,Tz\} \\ (\forall x,y,z \in V) \end{array} \right\}.$$

ただし，T^* は内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する T の共役作用素である．次の補題で $\mathfrak{str}(V)$ は Lie 代数をなすことがわかるので，$\mathfrak{str}(V)$ を JTS V の構造代数と呼ぶ．

$T \in \mathrm{End}(V)$ のとき，明らかに

$$T \in \mathfrak{str}(V) \iff [T, x \,\Box\, y] = (Tx) \,\Box\, y - x \,\Box\, (T^*y) \quad (\forall x,y \in V). \tag{9.3}$$

注意 9.7.　JT identity と $(a \,\Box\, b)^* = b \,\Box\, a$ であることから，任意の $a,b \in V$ に対して，$a \,\Box\, b \in \mathfrak{str}(V)$ である．

補題 9.8.　$\mathfrak{str}(V)$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数である．

証明.　$S,T \in \mathfrak{str}(V)$ とする．このとき，任意の $x,y \in V$ に対して，

$$\begin{aligned}
[[S,T],\, x \,\Box\, y] &= -[[T,\, x \,\Box\, y], S] - [[x \,\Box\, y, S], T] \qquad \text{(Jacobi identity)} \\
&= -[(Tx) \,\Box\, y - x \,\Box\, T^*y,\, S] + [(Sx) \,\Box\, y - x \,\Box\, (S^*y),\, T] \quad ((11.3)) \\
&= (STx) \,\Box\, y - (Tx) \,\Box\, (S^*y) - (Sx) \,\Box\, (T^*y) + x \,\Box\, (S^*T^*y) \\
&\qquad - (TSx) \,\Box\, y + (Sx) \,\Box\, (T^*y) + (Tx) \,\Box\, (S^*y) - x \,\Box\, (T^*S^*y) \\
&= \big((ST - TS)x\big) \,\Box\, y - x \,\Box\, \big((T^*S^* - S^*T^*)y\big).
\end{aligned}$$

(11.3) より，これは $[S,T] \in \mathfrak{str}(V)$ であることを示している．　□

補題 9.9.　$T \in \mathfrak{str}(V)$，$b \in V$ のとき，$[p_b, T] = p_{T^*b}$.

証明.　定義より

$$\begin{aligned}
[p_b, T](x) &= \frac{d}{dt} p_b(x + tTx)\Big|_{t=0} - \frac{d}{dt} T(x + tp_b(x))\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\{x + tTx, b, x + tTx\}\Big|_{t=0} - Tp_b(x) \\
&= 2\{x, b, Tx\} - TP(x)b \\
&= 2(x \,\Box\, b)Tx - T(x \,\Box\, b)x.
\end{aligned}$$

ここで (11.3) より，$T(x \,\Box\, b) = (x \,\Box\, b)T + (Tx) \,\Box\, b - x \,\Box\, (T^*b)$ であるから

$$\begin{aligned}
[p_b, T](x) &= (x \,\Box\, b)Tx - ((Tx) \,\Box\, b)x + (x \,\Box\, (T^*b))x \\
&= p_{T^*b}(x). \qquad \Box
\end{aligned}$$

補題 9.10. $b, c \in V$ のとき，$[p_b, p_c] = 0$.

証明. 定義より

$$\begin{aligned}(p_b \cdot p_c)(x) &= \frac{d}{dt} p_b(x + tp_c(x))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\{x + tp_c(x), b, x + tp_c(x)\}\Big|_{t=0} \\ &= 2\{x, b, P(x)c\} = 2(x \,\square\, b)P(x)c \\ &= 2P(x)(b \,\square\, x)c \qquad \text{(命題 2.1 (1))} \\ &= 2P(x)\{b, x, c\}.\end{aligned}$$

最後の項は b, c に関して対称であるから，$[p_b, p_c] = 0$ である． □

以下，$V \,\square\, V := \mathrm{span}\{x \,\square\, y \,;\, x, y \in V\}$ とおく．JT identity より，$V \,\square\, V$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数であり，また $V \,\square\, V \subset \mathfrak{str}(V)$ でもある（注意 9.7）.

定義. $\mathcal{P}(V)$ の部分空間 $\mathfrak{g}(k)$ $(k = -1, 0, 1)$ を次で定義する：

$$\mathfrak{g}(-1) := \mathcal{P}_0(V) = V, \quad \mathfrak{g}(0) := V \,\square\, V \subset \mathcal{P}_1(V), \quad \mathfrak{g}(1) := \{p_b \,;\, b \in V\} \subset \mathcal{P}_2(V).$$

命題 9.11. $|k| > 1$ のとき $\mathfrak{g}(k) = \{0\}$ と約束すると，$[\mathfrak{g}(i), \mathfrak{g}(j)] \subset \mathfrak{g}(i+j)$ が成り立つ．特に $\mathfrak{g}(\pm 1)$ は可換な Lie 代数になっている．$\mathfrak{g}(0)$ も Lie 代数をなしている．

証明. (1) $[p_b, a] = 2a \,\square\, b$（補題 9.6）より，$[\mathfrak{g}(1), \mathfrak{g}(-1)] \subset \mathfrak{g}(0)$.
(2) $[p_b, c \,\square\, d] = p_{(d \,\square\, c)b}$ （補題 9.9）より，$[\mathfrak{g}(1), \mathfrak{g}(0)] \subset \mathfrak{g}(1)$.
(3) 補題 9.10 より，$[\mathfrak{g}(1), \mathfrak{g}(1)] \subset \{0\}$.
(4) JT identity より，$[\mathfrak{g}(0), \mathfrak{g}(0)] \subset \mathfrak{g}(0)$.
(5) 補題 9.4 (3) より，$[\mathfrak{g}(0), \mathfrak{g}(-1)] \subset \mathfrak{g}(-1)$.
(6) $[\mathfrak{g}(-1), \mathfrak{g}(-1)] = \{0\}$ は明らか. □

定理 9.12. $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}(-1) + \mathfrak{g}(0) + \mathfrak{g}(1)$ は $\mathcal{P}(V)$ の有限次元の部分 Lie 代数である．ブラケット積は次のように記述される：

$$[a + T + p_b,\, a' + T' + p_{b'}] = a'' + T'' + p_{b''} \qquad \text{with}$$
$$\begin{cases} a'' = Ta' - T'a \\ T'' = 2a' \,\square\, b + [T, T'] - 2a \,\square\, b' \\ b'' = (T')^* b - T^* b' \end{cases}$$

定義. この $\mathfrak{g}$ を正定値 JTS V に付随する **Koecher–Tits の Lie** 代数と呼ぶ.

§10. Koecher–Tits の Lie 代数

以下 $(V, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ を正定値 JTS とする．記号の復習をしておこう：

$$(x \,\square\, y)z = \{x, y, z\}, \qquad P(x)y = \{x, y, x\} = p_y(x).$$

次に，$\mathfrak{g}(-1) := V$，$\mathfrak{g}(0) := V \,\square\, V$，$\mathfrak{g}(1) := \{p_b \,;\, b \in V\}$ とおき，V 上の多項式写像の全体のなす Lie 代数 $\mathcal{P}(V)$ の中で，$\mathfrak{g} := \mathfrak{g}(-1) + \mathfrak{g}(0) + \mathfrak{g}(1)$ を考えると，$\mathfrak{g}$ はその部分 Lie 代数であって，ブラケット積は次のように記述される：

$$[a + T + p_b,\, a' + T' + p_{b'}] = a'' + T'' + p_{b''} \qquad \text{with}$$

$$\begin{cases} a'' = Ta' - T'a \\ T'' = 2a' \,\square\, b + [T, T'] - 2a \,\square\, b' \\ b'' = (T')^* b - T^* b' \end{cases} \tag{10.1}$$

この Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を **Koecher–Tits の Lie 代数**と呼んだ．

一般に L を Lie 代数とするとき，各 $x \in L$ に対して，L 上の線型作用素 $\operatorname{ad} x$ を次で定義する：

$$(\operatorname{ad} x)y := [x, y] \qquad (y \in L).$$

対応 $L \ni x \mapsto \operatorname{ad} x \in \operatorname{End}(L)$ も線型であることに注意．

補題 10.1. $\operatorname{ad} : x \mapsto \operatorname{ad} x$ は Lie 代数 L の表現になっている：線型性の他に

$$\operatorname{ad}[x, y] = [\operatorname{ad} x,\, \operatorname{ad} y] \;(= (\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y) - (\operatorname{ad} y)(\operatorname{ad} x)) \qquad (\forall x, y \in L).$$

この表現 ad を Lie 代数 L の随伴表現 (**adjoint representation**) という．

証明. 任意の $z \in L$ に対して，

$$\begin{aligned} (\operatorname{ad}[x, y])z &= [[x, y], z] = -[[y, z], x] - [[z, x], y] \quad \text{（Jacobi 等式より）} \\ &= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\ &= (\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)z - (\operatorname{ad} y)(\operatorname{ad} x)z \end{aligned}$$

となって，$\operatorname{ad}[x, y] = [\operatorname{ad} x,\, \operatorname{ad} y]$ が出る． □

Korcher–Tits の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に戻ろう．

補題 10.2. (1) V 上の恒等作用素を I_V とするとき，$I_V \in V \,\square\, V = \mathfrak{g}(0)$.
(2) $\mathfrak{g}(k) = \{X \in \mathfrak{g} \,;\, (\operatorname{ad}(-I_V))X = kX\}$ $(k = 0, \pm 1)$.

証明. (1) $n = \dim V$ とし，$e_1, \dots, e_n$ を V の内積 $\langle\, v \,|\, v' \,\rangle = \mathrm{tr}(v \,\square\, v')$ に関する正規直交基底とする．$I_V = \sum_{j=1}^{n} e_j \,\square\, e_j$ となることを示そう．そうすると $I_V \in V \,\square\, V$ となる．任意の $v, v' \in V$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \langle\, (e_j \,\square\, e_j) v \,|\, v' \,\rangle &= \sum_{j=1}^{n} \langle\, (v \,\square\, e_j) e_j \,|\, v' \,\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle\, e_j \,|\, (e_j \,\square\, v) v' \,\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle\, e_j \,|\, (v' \,\square\, v) e_j \,\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle\, (v \,\square\, v') e_j \,|\, e_j \,\rangle \\ &= \mathrm{tr}(v \,\square\, v') = \langle\, v \,|\, v' \,\rangle.\end{aligned}$$

$v' \in V$ は任意であるから，$\sum_{j=1}^{n} (e_j \,\square\, e_j) = I_V$ である．
(2) (10.1) より，$a, b \in V$，$T \in \mathfrak{g}(0)$ のとき，

$$[I_V, a] = a, \qquad [I_V, T] = 0, \qquad [I_V, p_b] = -p_b$$

であるので，証明終わり． □

定義. $\sigma(a + T + p_b) := -b - T^* - p_a$ $(a, b \in V,\, T \in \mathfrak{g}(0))$ とおく．

明らかに σ は $\mathfrak{g}$ 上の線型作用素である．

補題 10.3. σ は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の自己同型で，$\sigma^2 = I$ かつ $\sigma\mathfrak{g}(k) = \mathfrak{g}(-k)$ $(k = 0, \pm 1)$ をみたす．

証明. 自己準同型の部分だけが明らかではない．$a, a', b, b' \in V$，$T, T' \in \mathfrak{g}(0)$ のとき，(10.1) より

$$\begin{aligned}\sigma[a + T + p_b,\, a' + T' + p_{b'}] &= \sigma(a'' + T'' + p_{b''}) = -b'' - (T'')^* - p_{a''} \\ &= -(T')^* b + T^* b' - (2b \,\square\, a' + [T, T']^* - 2b' \,\square\, a) - p_{Ta' - T'a}.\end{aligned}$$

ここで，$[T, T']^* = [(T')^*, T^*]$ であるから，

$$\begin{aligned}\sigma[a + T + p_b,\, a' + T' + p_{b'}] &= [b + T^* + p_a,\, b' + (T')^* + p_{a'}] \\ &= [\sigma(a + T + p_b),\, \sigma(a' + T' + p_{b'})]\end{aligned}$$

となって証明が終わる． □

定義. L を Lie 代数とする．L 上の双線型形式

$$B(x, y) := \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y)\big) \qquad (x, y \in L)$$

を L の **Killing** 形式と呼ぶ．

• 明らかに $B(y,x) = B(x,y)$ $(\forall x, y \in L)$ が成り立つ.

補題 10.4. 次が成り立つ：

$$B\big((\operatorname{ad} x)y,\, z\big) = -B\big(y,\, (\operatorname{ad} x)z\big) \qquad (\forall x, y, z \in L).$$

証明. 定義により

$$\begin{aligned}
B\big((\operatorname{ad} x)y,\, z\big) &= B([x,y],\, z) = \operatorname{tr}\big((\operatorname{ad}[x,y])(\operatorname{ad} z)\big) \\
&= \operatorname{tr}\big((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y)(\operatorname{ad} z) - (\operatorname{ad} y)(\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} z)\big) \qquad (\text{補題 } 10.1) \\
&= \operatorname{tr}\big((\operatorname{ad} y)(\operatorname{ad} z)(\operatorname{ad} x) - (\operatorname{ad} y)(\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} z)\big) \\
&= \operatorname{tr}\big((\operatorname{ad} y)[\operatorname{ad} z, \operatorname{ad} x]\big) = -\operatorname{tr}\big((\operatorname{ad} y)(\operatorname{ad}[x,z])\big) \\
&= -B(y, [x,z]) = -B(y,\, (\operatorname{ad} x)z)
\end{aligned}$$

となって証明終わり. □

再び Koecher–Tits の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に戻る. 以下 B は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式, B_0 は $\mathfrak{g}(0)$ の Killing 形式とする.

命題 10.5. $X = a + T + p_b$, $X' = a' + T' + p_{b'}$ $(a, a', b, b' \in V,\ T, T' \in \mathfrak{g}(0))$ のとき

$$B(X, X') = B_0(T, T') + 2\operatorname{tr}(TT') - 4\langle\, a \,|\, b' \,\rangle - 4\langle\, b \,|\, a' \,\rangle.$$

証明. (10.1) より

$$\begin{aligned}
(\operatorname{ad} T)(a' + T' + p_{b'}) &= Ta' + [T, T'] - p_{T^* b'} \\
&= Ta' + [T, T'] - (\sigma T^* \sigma) p_{b'}.
\end{aligned}$$

ゆえに $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(-1) + \mathfrak{g}(0) + \mathfrak{g}(1)$ 上の線型作用素 $\operatorname{ad} T$ はブロック対角型で

$$\operatorname{ad} T = \begin{pmatrix} T & & \\ & \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}(0)} T & \\ & & -\sigma T^* \sigma \end{pmatrix}.$$

従って

$$(\operatorname{ad} T)(\operatorname{ad} T') = \begin{pmatrix} TT' & & \\ & (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}(0)} T)(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}(0)} T') & \\ & & \sigma T^* (T')^* \sigma \end{pmatrix}.$$

σ は線型同型 $\mathfrak{g}(1) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}(-1)$ を与えているので,

$$\begin{aligned}
B(T, T') &= \operatorname{tr}((\operatorname{ad} T)(\operatorname{ad} T')) = \operatorname{tr}(TT') + B_0(T, T') + \operatorname{tr}(T^*(T')^*) \\
&= 2\operatorname{tr}(TT') + B_0(T, T').
\end{aligned} \tag{10.2}$$

次に

$$\begin{aligned}
B(a, p_b) &= B([I_V, a],\, p_b) && \text{(by (10.1))}\\
&= B(I_V,\, [a,\, p_b]) && \text{(補題 10.4)}\\
&= -2B(I_V,\, a \,\square\, b) && \text{(by (10.1))}\\
&= -4\,\mathrm{tr}(a \,\square\, b) - 2B_0(I_V, a \,\square\, b) && \text{(by (10.2))}\\
&= -4\langle\, a \,|\, b \,\rangle && (\because \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}(0)}\, I_V = 0).
\end{aligned}$$

さらに $j + k \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
j \cdot B(\mathfrak{g}(j), \mathfrak{g}(k)) &= B\big([-I_V, \mathfrak{g}(j)],\, \mathfrak{g}(k)\big) && \text{(補題 10.2 (2))}\\
&= B\big(\mathfrak{g}(j),\, [I_V, \mathfrak{g}(k)]\big) && \text{(補題 10.4)}\\
&= -k \cdot B(\mathfrak{g}(j), \mathfrak{g}(k)) && \text{(補題 10.2 (2))}
\end{aligned}$$

より，$B(\mathfrak{g}(j), \mathfrak{g}(k)) = \{0\}$ が出る．以上より

$$\begin{aligned}
B(a + T + p_b,\, a' + T' + p_{b'}) &= B(a, p_{b'}) + B(T, T') + B(p_b, a')\\
&= -4\langle\, a \,|\, b' \,\rangle + 2\,\mathrm{tr}(TT') + B_0(TT') - 4\langle\, b \,|\, a' \,\rangle
\end{aligned}$$

となって証明が終わる． □

定理 10.6. B は非退化である．従って，Koecher–Tits の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は半単純（Cartan の判定基準）．

証明. $X = a + T + p_b \in \mathfrak{g}$ $(a, b \in V,\, T \in \mathfrak{g}(0))$ が，任意の $X' \in \mathfrak{g}$ に対して，$B(X, X') = 0$ をみたすとする．$X' = a' \in V$ ととると，命題 10.5 より

$$0 = B(X, a') = -4\langle\, b \,|\, a' \,\rangle.$$

$a' \in V$ は任意であるから，$b = 0$．次に $b' \in V$ は任意であるとして

$$0 = B(X, p_{b'}) = -4\langle\, a \,|\, b' \,\rangle.$$

これより $a = 0$ が出る．よって $X = T \in \mathfrak{g}(0)$．さらに $a', b' \in V$ を任意として，$2a' \,\square\, b' \in \mathfrak{g}(0)$ を考えると，

$$\begin{aligned}
0 = B(T,\, 2a' \,\square\, b') &= B(T,\, [p_{b'}, a']) && \text{(((10.1) より)}\\
&= B([a', T],\, p_{b'}) = -B(Ta', p_{b'}) && \text{(補題 10.4 と (10.1) より)}\\
&= 4\langle\, Ta' \,|\, b' \,\rangle && \text{(命題 10.5 より)}.
\end{aligned}$$

ゆえに $T=0$ である．以上で B が非退化であることが示された． $\square$

(10.1) より，$a, b \in V$ ならば

$$a \,\square\, b = -\tfrac{1}{2}[a,\, p_b] = \tfrac{1}{2}[a, \sigma b].$$

特に $[\mathfrak{g}(-1), \mathfrak{g}(1)] = \mathfrak{g}(0)$ であることもわかる．従って，$a, b, c \in V$ のとき

$$\begin{aligned}\{a,b,c\} &= (a \,\square\, b)c = [a \,\square\, b,\, c] \qquad\qquad \text{(by (10.1))}\\ &= \tfrac{1}{2}\big[[a, \sigma b], c\big].\end{aligned}$$

逆に半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}$ の involutive な自己同型 σ があって

$$\begin{aligned}&\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(-1) + \mathfrak{g}(0) + \mathfrak{g}(1), && [\mathfrak{g}(j), \mathfrak{g}(k)] \subset \mathfrak{g}(j+k) \quad (\forall j,k),\\ &\sigma\mathfrak{g}(j) = \mathfrak{g}(-j) \quad (j = 0, \pm 1), && [\mathfrak{g}(-1), \mathfrak{g}(1)] = \mathfrak{g}(0)\end{aligned}$$

が成り立っているとする．ただし，$|k| > 1$ のとき，$\mathfrak{g}(k) = \{0\}$ とする．$V := \mathfrak{g}(-1)$ に次で 3 項積を定義する：

$$\{x,y,z\} := \tfrac{1}{2}\big[[x, \sigma y], z\big].$$

命題 10.7. この 3 項積で $V = \mathfrak{g}(-1)$ は JTS になる．

証明. (1) $\{x,y,z\}$ が x, z に関して対称なこと．
Jacobi の恒等式より，$x, y, z \in \mathfrak{g}(-1)$ のとき

$$\{x,y,z\} = \tfrac{1}{2}\big[[x,\sigma y], z\big] = -\tfrac{1}{2}\big[[\sigma y, z], x\big] - \tfrac{1}{2}\big[[z,x], \sigma y\big].$$

ここで $[z,x] = 0$ であるから

$$\{x,y,z\} = \tfrac{1}{2}[\big[[z,\sigma y], x\big] = \{z,y,x\}.$$

(2) JT identity の証明．$a, b, x, y, z \in V = \mathfrak{g}(-1)$ とする．$\sigma\big[[b,\sigma a], y\big] = \big[[\sigma b, a], \sigma y\big]$ であるから，

$$\begin{aligned}\big((a \,\square\, b)x\big) \,\square\, y - x \,\square\, \big((b \,\square\, a)x\big) &= \tfrac{1}{4}\big[[[a,\sigma b], x], \sigma y\big] - \tfrac{1}{4}\big[x, [[\sigma b, a], \sigma y]\big]\\ &= -\tfrac{1}{4}\big[[[\sigma b, x], a], \sigma y\big] + \tfrac{1}{4}\big[x, [[a,\sigma y], \sigma b]\big]. \qquad (*)\end{aligned}$$

最後の等号で，$[x,a] = 0$ および $[\sigma y, \sigma b] = 0$ を使った．ここで再び Jacobi の恒等式より

$$\begin{aligned}\big[[[\sigma b, x], a], \sigma y\big] &= -\big[[a,\sigma y], [\sigma b, x]\big] - \big[[\sigma y, [\sigma b, x]], a\big],\\ \big[x, [[a,\sigma y], \sigma b]\big] &= -\big[[a,\sigma y], [\sigma b, x]\big] - \big[\sigma b, [x, [a,\sigma y]]\big].\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}
(*) &= \tfrac{1}{4}\bigl[[\sigma y,[\sigma b,x]],a\bigr] - \tfrac{1}{4}\bigl[\sigma b,[x,[a,\sigma y]]\bigr] \\
&= -\tfrac{1}{4}\bigl[[\sigma b,[x,\sigma y]],a\bigr] + \tfrac{1}{4}\bigl[\sigma b,[a,[\sigma y,x]]\bigr] && \text{（Jacobi の恒等式）} \\
&= -\tfrac{1}{4}\bigl[[\sigma b,[x,\sigma y]],a\bigr] - \tfrac{1}{4}\bigl[[[x,\sigma y],a],\sigma b\bigr] && \text{（第 2 の書換え）} \\
&= \tfrac{1}{4}\bigl[[a,\sigma b],[x,\sigma y]\bigr] && \text{（Jacobi の恒等式）} \\
&= [a\,\square\,b, x\,\square\,y].
\end{aligned}$$

よって JT identity を得る． □

§11. Derivations

以下しばらくの間，$\mathfrak{g}$ を一般の Lie 代数（実または複素）とする．

定義． $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) := \{D \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})\ ;\ T[x,y] = [Tx,y] + [x,Ty]\ (\forall x,y \in \mathfrak{g})\}$.
$\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ を Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の微分代数と呼ぶ．

$T \in \mathrm{Eng}(\mathfrak{g})$ のとき，定義より明らかに

$$T \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \iff [T,(\mathrm{ad}\,x)] = \mathrm{ad}(Tx) \qquad (\forall x \in \mathfrak{g}). \tag{11.1}$$

例 11.1. $x \in \mathfrak{g}$ のとき，$\mathrm{ad}\,x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ である．実際，$x \mapsto \mathrm{ad}\,x$ が $\mathfrak{g}$ の表現であること（補題 10.1）より

$$[\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,y] = \mathrm{ad}[x,y] = \mathrm{ad}((\mathrm{ad}\,x)y) \qquad (\forall x,y \in \mathfrak{g}).$$

(11.1) より，$\mathrm{ad}\,x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ である．$\mathrm{ad}\,x$ と書ける $\mathfrak{g}$ の微分を内部微分 (inner derivation) と呼び，その全体を $\mathrm{InnDer}(\mathfrak{g})$ で表す．

補題 11.2. (1) $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ は Lie 代数 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の部分 Lie 代数である．
(2) $\mathrm{InnDer}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ のイデアルである．

証明． (1) $S,T \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ とすると

$$\begin{aligned}
[[S,T],\mathrm{ad}\,x] &= -[[T,\mathrm{ad}\,x],S] - [[\mathrm{ad}\,x,S],T] \\
&= -[\mathrm{ad}(Tx),S] + [\mathrm{ad}(Sx),T] && \text{(by (11.1))} \\
&= \mathrm{ad}(STx) - \mathrm{ad}(TSx) && \text{(by (11.1))} \\
&= \mathrm{ad}([S,T]x).
\end{aligned}$$

ゆえに $[S,T] \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ である．
(2) (11.1) から明らか． $\square$

定理 11.3. $\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数とする（$\mathfrak{g}$ の Killing 形式 $B(x,y) := \mathrm{tr}((\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y))$ は非退化）．このとき，$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{InnDer}(\mathfrak{g})$.

証明. B は非退化であるので，$\mathfrak{g}$ の双対ベクトル空間（$\mathfrak{g}$ 上の線型形式全体）$\mathfrak{g}^*$ は次のようになる：

$$\mathfrak{g}^* := \{B(\cdot, y) \ ; \ y \in \mathfrak{g}\}. \tag{11.2}$$

さて $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ が与えられたとし，次の $F \in \mathfrak{g}^*$ を考える：

$$F(x) := \mathrm{tr}(D(\mathrm{ad}\, x)) \qquad (x \in \mathfrak{g}).$$

そうすると，(11.2) より，適当な $y_0 \in \mathfrak{g}$ を用いて，$F(x) = B(x, y_0)$ $(\forall x \in \mathfrak{g})$ となる．このとき，任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ の対して

$$\begin{aligned}
B(Dx, y) &= \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}\, Dx)(\mathrm{ad}\, y)\big) && \text{（}B\text{ の定義）}\\
&= \mathrm{tr}\big([D, \mathrm{ad}\, x](\mathrm{ad}\, y)\big) && \text{(by (11.1))}\\
&= \mathrm{tr}\big(D(\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y)\big) - \mathrm{tr}\big(D(\mathrm{ad}\, y)(\mathrm{ad}\, x)\big)\\
&= \mathrm{tr}\big(D(\mathrm{ad}[x,y])\big) = F([x,y])\\
&= B([x,y], y_0) = B(y, [y_0, x])\\
&= B((\mathrm{ad}\, y_0)x, y).
\end{aligned}$$

B は非退化であるから，$D = \mathrm{ad}\, y_0$ である． $\square$

以下 $(V, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ を正定値 JTS とし，内積はいつもの通り，$\langle\, v \,|\, v' \,\rangle = \mathrm{tr}(v \,\square\, v')$ とする．§9 で定義した V の構造代数 $\mathfrak{str}(V)$ を思い出そう：

$$\mathfrak{str}(V) := \left\{ T \in \mathrm{End}(V) \ ; \ \begin{array}{r} T\{x,y,z\} = \{Tx,y,z\} - \{x,T^*y,z\} + \{x,y,Tz\} \\ (\forall x,y,z \in V) \end{array} \right\}.$$

$T \in \mathrm{End}(V)$ のとき，

$$T \in \mathfrak{str}(V) \iff [T, x \,\square\, y] = (Tx) \,\square\, y - x \,\square\, (T^*y) \quad (\forall x, y \in V). \tag{11.3}$$

また $V \,\square\, V := \mathrm{span}\{x \,\square\, y \ ; \ x, y \in V\}$ とおいていた．Lie 代数のときと同様に

$$\mathrm{Der}(V) := \left\{ T \in \mathrm{End}(V) \ ; \ \begin{array}{r} T\{x,y,z\} = \{Tx,y,z\} + \{x,Ty,z\} + \{x,y,Tz\} \\ (\forall x,y,z \in V) \end{array} \right\}.$$

$T \in \mathrm{End}(V)$ のとき，明らかに

$$T \in \mathrm{Der}(V) \iff [T, x \,\Box\, y] = (Tx) \,\Box\, y + x \,\Box\, (Ty) \qquad (\forall x, y \in V). \tag{11.4}$$

補題 11.4. (1) $\mathfrak{str}(V)$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数で，$\mathfrak{str}(V)^* = \mathfrak{str}(V)$.
(2) $V \,\Box\, V$ は $\mathfrak{str}(V)$ のイデアル.
(3) $\mathrm{Der}(V)$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数であって，$\mathrm{Der}(V) = \{T \in \mathfrak{str}(V)\ ;\ T^* = -T\}$.

証明. (1) 部分 Lie 代数になることは補題 9.8 ですでに証明済．共役をとることで安定であることを示そう．$T \in \mathfrak{str}(V)$ とする．このとき，(11.3) の両辺を共役を考えると，$[A, B]^* = [B^*, A^*]$ に注意して

$$[y \,\Box\, x, T^*] = y \,\Box\, (Tx) - (T^* y) \,\Box\, x.$$

すなわち，

$$[T^*, y \,\Box\, x] = (T^* y) \,\Box\, x - y \,\Box\, (Tx).$$

$x, y \in V$ は任意であるから，$T^* \in \mathfrak{str}(V)$ である．
(2) 注意 9.7 より，$V \,\Box\, V \subset \mathfrak{str}(V)$ である．イデアルであることは (11.3) より．
(3) まず $S, T \in \mathrm{Der}(V)$ とする．Jacobi の恒等式と (11.4) より

$$\begin{aligned}
[[S, T], x \,\Box\, y] &= -[[T, x \,\Box\, y], S] - [[x \,\Box\, y, S], T] \\
&= -[(Tx) \,\Box\, y + x \,\Box\, (Ty), S] + [Sx \,\Box\, y + x \,\Box\, Sy, T] \\
&= (STx) \,\Box\, y + (Tx) \,\Box\, (Sy) + (Sx) \,\Box\, (Ty) + x \,\Box\, (STy) \\
&\qquad - (TSx) \,\Box\, y - (Sx) \,\Box\, (Ty) - (Tx) \,\Box\, (Sy) - x \,\Box\, (TSy) \\
&= ([S, T]x) \,\Box\, y + x \,\Box\, ([S, T]y).
\end{aligned}$$

ゆえに $\mathrm{Der}(V)$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分 Lie 代数である．次に $T \in \mathrm{Der}(V)$ とする．(11.4) の両辺の trace をとって

$$0 = \mathrm{tr}((Tx) \,\Box\, y) + \mathrm{tr}(y \,\Box\, (Tx)) = \langle\, Tx \,|\, y \,\rangle + \langle\, x \,|\, Ty \,\rangle.$$

これは $T^* = -T$ であることを示す．このとき，(11.4) から (11.3) が出る．
逆に $T \in \mathfrak{str}(V)$ が $T^* = -T$ をみたすなら，(11.3) は (11.4) となる． $\square$

例 11.5. $a, b \in V$ のとき，$a \,\Box\, b - b \,\Box\, a \in \mathrm{Der}(V)$．実際，補題 11.4 (2) より，$a \,\Box\, b - b \,\Box\, a \in \mathfrak{str}(V)$ であり，明らかに歪対称であるので，補題 11.4 より，$a \,\Box\, b - b \,\Box\, a \in \mathrm{Der}(V)$ である．$a \,\Box\, b - b \,\Box\, a$ の 1 次結合で書ける V の微分を内部微分と呼び，$\mathrm{InnDer}(V)$ で表す．

定理 11.6. (1) $\mathfrak{str}(V) = V \square V$.
(2) $\mathrm{Der}(V) = \mathrm{InnDer}(V)$.

証明. $\mathfrak{g}$ を V から得られる Korcher–Tits の Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ は半単純であったことを思いだそう（定理 10.6）．
(1) $S \in \mathfrak{str}(V)$ とする．次で与えられる $\mathfrak{g}$ 上の線型作用素考える：

$$D(a + T + p_b) = Sa + [S, T] - p_{S^*b} \qquad (a, b \in V,\, T \in V \square V).$$

ここで，補題 11.4 (2) より，確かに $[S, T] \in V \square V$ であることに注意．この D は $\mathfrak{g}$ の微分である．実際，補題 9.4 と 9.9 より

$$D(a + T + p_b) = [S,\, a + T + p_b]_{\mathcal{P}(V)} \quad \text{（右辺は } \mathcal{P}(V) \text{ でのブラケット）}$$

となっている．ゆえに定理 11.3 より，$X_0 = a_0 + T_0 + p_{b_0} \in \mathfrak{g}$ が存在して，$D = \mathrm{ad}\, X_0$ となる．さて $a \in V = \mathfrak{g}(0)$ のとき

$$Sa = Da = [a_0 + T_0 + p_{b_0},\, a] = T_0 a + 2a \square b_0. \qquad (*)$$

V 成分を比較して，$Sa = T_0 a$ $(\forall a \in V)$ が出るので，$S = T_0 \in \mathfrak{g}(0) = V \square V$ となる．ついでながら，上記 $(*)$ で，$\mathfrak{g}(0)$ 成分を比較すると，$a \square b_0 = 0$ が出，両辺の trace をとることで，$b_0 = 0$ が出る．Sp_b を考えることで，$a_0 = 0$ も出る．
(2) $D \in \mathrm{Der}(V)$ とすると，$D \in \mathfrak{str}(V)$ かつ $D^* = -D$ である．(1) より $D = \sum x_j \square y_j$ と書けるが，$D^* = -D$ なので

$$D = \frac{1}{2}(D - D^*) = \frac{1}{2}\sum (x_j \square y_j - y_j \square x_j) \in \mathrm{InnDer}(V)$$

となって証明終わり． □

【余談】 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が半単純でなくても，$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{InnDer}(\mathfrak{g})$ となることがある．$\mathfrak{g}$ として，2 次元の非可換な Lie 代数 $\mathfrak{g}$ で，$[e, f] = f$ となる基底 e, f を持つものを考える．$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ として，$\mathrm{ad}(\alpha e + \beta f)$ を基底 e, f に関して行列表示してみよう：

$$\mathrm{ad}(\alpha e + \beta f)e = -\beta[e, f] = -\beta f, \qquad \mathrm{ad}(\alpha e + \beta f)f = \alpha[e, f] = \alpha f$$

であるから

$$\mathrm{ad}(\alpha e + \beta f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

一方で，D を同様に行列表示して

$$D = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

とすると，$De = pe + rf$，$Df = qe + sf$ である．$\mathfrak{g}$ の微分ということより

$$Df = D[e,f] = [De,f] + [e,Df] = [pe+rf,f] + [e,qe+sf] = pf + sf.$$

最左辺において $Df = qe + sf$ であるから，$p = q = 0$．ゆえに

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r & s \end{pmatrix} = \mathrm{ad}(se - rd).$$

この $\mathfrak{g}$ は半単純ではない．実際,

$$\mathrm{ad}(\alpha e + \beta f)\,\mathrm{ad}(\alpha' e + \beta' f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta' & \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha\beta' & \alpha\alpha' \end{pmatrix}.$$

ゆえに，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B は

$$B(\alpha e + \beta f,\, \alpha' e + \beta' f) = \alpha\alpha'$$

となって，明らかに非退化ではない：$B(f,\, \alpha' e + \beta' f) = 0$ が任意の $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ．

余談ついでに，2 次元の非可換な Lie 代数は上記の $\mathfrak{g}$ に限ることを示そう．非可換であるから $[x,y] \neq 0$ となる元 x, y が存在する．明らかにこの x, y は 1 次独立である．$[x.y] = \alpha x + \beta y$ とする．$\beta = 0$ のときは，$\alpha \neq 0$ であって，

$$[-\alpha^{-1} y, x] = x$$

であるから，$e := -\alpha^{-1} y$，$f = x$ とおけばよい．$\beta \neq 0$ のとき，

$$[x,[x,y]] = [x, \alpha x + \beta y] = \beta[x,y].$$

従って，$e := \beta^{-1} x$，$f := [x,y]$ とおくと，$[e,f] = f$．この e, f はもちろん 1 次独立である．

§12. スペクトルノルム

以下 $(V, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ は正定値な JTS とし，内積をいつもの通り $\langle\, v \,|\, v' \,\rangle := \mathrm{tr}(v \,\Box\, v')$ で表す．

定義. 　各 $v \in V$ に対して，$v \,\Box\, v$ は半正定値な自己共役作用素であるから，正定値な平方根 $(v \,\Box\, v)^{1/2}$ が存在する．その作用素ノルムを $\|v\|_\infty$ で表す：

$$\|v\|_\infty := \|(v \,\Box\, v)^{1/2}\|.$$

$\|v\|_\infty$ がノルムになることがわかるので，これを v のスペクトルノルムと呼ぶ．

注意 12.1. V 上の線型作用素 T の作用素ノルム $\|T\|$ は次で与えられる：

$$\|T\| := \sup_{\|v\| \leqq 1} \|Tv\|.$$

$\|T\|$ はいわゆる C^* 条件をみたしている：$\|T^*T\| = \|T\|^2$．また，T が自己共役ならば，$\|T\|$ は T の固有値の絶対値の最大値に等しい．従ってまた，$\|v\|_\infty = \|v \,\square\, v\|^{1/2}$ であることもわかる．

補題 12.2. $\|v\|_\infty$ は v のスペクトル分解における v の固有値の内，最大のものに等しい．特に $\|v\|_\infty = 0$ ならば $v = 0$ である．

証明. v のスペクトル分解を

$$v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_j \qquad (0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m)$$

とする．ここで，$c_1, \ldots, c_m$ は互いに直交する non-zero tripotents であるので，V は同時 Peirce 分解される（定理 4.5)：

$$V = \sum_{0 \leqq i \leqq j \leqq m} V_{ij}.$$

ここで，$V_i(c_j)$ を tripotent c_j の Peirce i 空間とするとき，

$$\begin{aligned}
V_{00} &= V_0(c_1) \cap \cdots \cap V_0(c_m) \\
V_{0j} &= V_{\frac{1}{2}}(c_j) \bigcap \Big(\bigcap_{i \neq j} V_0(c_j) \Big) && (j = 1, \ldots, m), \\
V_{ij} &= V_{\frac{1}{2}}(c_i) \cap V_{\frac{1}{2}}(c_j) && (1 \leqq i < j \leqq m), \\
V_{ii} &= V_1(c_i) && (i = 1, \ldots, m).
\end{aligned}$$

このとき，$v \,\square\, v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^2 (c_j \,\square\, c_j)$．さて，$\lambda_0 := 0$ とおくと

$$(v \,\square\, v)\big|_{V_{kl}} = \frac{1}{2}(\lambda_k^2 + \lambda_l^2)\mathrm{Id}.$$

ゆえに $v \,\square\, v$ の固有値は，$\left\{ \frac{1}{2}(\lambda_k^2 + \lambda_l^2) \,;\, 0 \leqq k \leqq l \leqq m \right\}$．この内，最大のものは，$\lambda_m^2$ に等しい．ゆえに補題が成り立つ． $\square$

定理 12.3. $\|\cdot\|_\infty$ は V のノルムであって，$\|v^{2k+1}\|_\infty = \|v\|_\infty^{2k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ が成り立つ．

証明． 三角不等式のみ問題．まず,「球」

$$B := \{v \in V \,;\, \|v\|_\infty \leqq 1\}$$

は凸集合であることを示そう．実際 $u, v, x \in V$ とすると

$$\begin{aligned}
\langle\, (u \,\square\, v)x \,|\, x \,\rangle &= \langle\, (x \,\square\, v)u \,|\, x \,\rangle = \langle\, u \,|\, (v \,\square\, x)x \,\rangle \\
&= \langle\, u \,|\, (x \,\square\, x)v \,\rangle = \langle\, (x \,\square\, x)u \,|\, v \,\rangle \\
&\leqq \langle\, (x \,\square\, x)u \,|\, u \,\rangle^{1/2} \langle\, (x \,\square\, x)^{1/2} v \,|\, v \,\rangle^{1/2} \\
&= \langle\, (u \,\square\, u)x \,|\, x \,\rangle^{1/2} \langle\, (v \,\square\, v)x \,|\, x \,\rangle^{1/2} \\
&\leqq \|(u \,\square\, u)x\|^{1/2} \|(v \,\square\, v)x\|^{1/2} \|x\| \\
&\leqq \|u\|_\infty \|v\|_\infty \|x\|^2.
\end{aligned}$$

これより，

$$u, v \in B \implies \langle\, (u \,\square\, v)x \,|\, x \,\rangle \leqq \|x\|^2. \tag{12.1}$$

さて，$0 \leqq t \leqq 1$ とし，$w = tu + (1-t)v$ を考えると，(12.1) より

$$\begin{aligned}
&\|(w \,\square\, w)^{1/2} x\|^2 \\
&\quad = \langle\, (w \,\square\, w)x \,|\, x \,\rangle \\
&\quad = t^2 \langle\, (u \,\square\, u)x \,|\, x \,\rangle + t(1-t) \langle\, (u \,\square\, v)x \,|\, x \,\rangle + t(1-t) \langle\, (v \,\square\, u)x \,|\, x \,\rangle \\
&\qquad\quad + (1-t)^2 \langle\, (v \,\square\, v)x \,|\, x \,\rangle \\
&\quad \leqq \big(t^2 + 2t(1-t) + (1-t)^2\big) \|x\|^2 \\
&\quad = \|x\|^2.
\end{aligned}$$

これは $\|(w \,\square\, w)^{1/2}\| \leqq 1$ であることを示している．ゆえに B は凸集合である．

さて一般に $u, v \in V$ とする．B の凸性より

$$\begin{aligned}
\|u + v\|_\infty &= (\|u\|_\infty + \|v\|_\infty) \left\| \underbrace{\frac{\|u\|_\infty}{\|u\|_\infty + \|v\|_\infty} \frac{u}{\|u\|_\infty} + \frac{\|v\|_\infty}{\|u\|_\infty + \|v\|_\infty} \frac{v}{\|v\|_\infty}}_{\in B} \right\| \\
&\leqq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.
\end{aligned}$$

ゆえに三角不等式が成立する．

次に $v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_j$ $(0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m)$ を v のスペクトル分解とすると，$v^{2k+1} =$

$\sum \lambda_j^{2k+1} c_j$ であるから，補題 12.2 より

$$\|v^{2k+1}\|_\infty = \lambda_m^{2k+1} = \|v\|_\infty^{2k+1}$$

となって証明終わり． □

例 12.4. $V = \mathrm{Mat}(p \times q, \mathbb{R})$ で考える．各 $T \in \mathrm{Mat}(p \times q, \mathbb{R})$ を線型写像 $T : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ と見る．

$$ {}^tTT = \sum_{j=1}^{m} \mu_j P_j \qquad (0 < \mu_1 < \cdots < \mu_m)$$

を自己共役作用素 ${}^tTT : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ のスペクトル分解とする．ここで，P_j は固有値 μ_j に対する固有空間 E_j への直交射影作用素 $\mathbb{R}^q \to E_j$ である．C_j を，始空間が E_j，終空間が TE_j である部分的等長写像とすると，例 4.3 で示したように，

$$T = \sum_{j=1}^{m} \sqrt{\mu_j}\, C_j$$

が，JTS の意味での T のスペクトル分解である．このとき，補題 12.2 と注意 12.1 より

$$\|T\|_\infty = \sqrt{\mu_m} = \|{}^tTT\|^{1/2} = \|T\|.$$

ゆえにこの例では，スペクトルノルムは，作用素ノルムに等しい．

§13. Hermitian JTS

V を複素ベクトル空間とする．今，<u>実</u> 3 重線型写像 $\{\cdot,\cdot,\cdot\} : V \times V \times V \to V$ が与えられていて，$(V, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ は，実 JTS をなしているとする．

定義. $(V, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ が **Hermitian** であるとは，$\{x, y, z\}$ が，x, z に関して $\mathbb{C}$ 線型，かつ y に関して $\mathbb{C}$ 反線型となっていることである．

今までと同様に，作用素 $(x \,\square\, y)z = \{x, y, z\}$，$P(x)y = \{x, y, x\}$ を定義すると，$x \,\square\, y$ は $\mathbb{C}$ 線型な作用素であるが，$P(x)$ は $\mathbb{C}$ 反線型な作用素である．また，$x \,\square\, y$ は，x については $\mathbb{C}$ 線型に，y については $\mathbb{C}$ 反線型に依存することに注意．

定義. Hermitian JTS $(V, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ が正定値 であるとは，$\mathbb{C}$ 線型写像のトレース $\mathrm{tr}(v \,\square\, v')$ が，V に Hermitian な内積を与えることである．

例 13.1. $V = \mathrm{Mat}(p \times q, \mathbb{C})$ を考える．V には，

$$\{x, y, z\} := \frac{1}{2}(xy^* z + zy^* x)$$

で 3 項積が入り，この 3 項積で Hermitian JTS になっている．そして V は

$$(x\,|\,y)_{\mathrm{tr}} := \mathrm{tr}({}^t x \overline{y}) = \mathrm{tr}(\overline{y}\,{}^t x) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} x_{ij}\overline{y}_{ij}$$

によって Hermitian な内積を持っている．例 3.5 と全く同じ計算で

$$\mathrm{tr}(x \,\Box\, y) = \frac{p+q}{2}(x\,|\,y)_{\mathrm{tr}}$$

がわかるので，V は正定値である．

以下 $(V, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ を正定値な Hermitian JTS とする．このとき，任意の $x \in V$ に対して，$x \,\Box\, x$ は半正定値な自己共役作用素になるので，これまでと全く同様な理論構成ができる．

c を V の極大 tripotent とし，$V = V_{\frac{1}{2}}(c) + V_1(c)$ を対応する V の Peirce 分解とする．このとき，$V_1(c)$ は $a \underset{c}{\cdot} b := \{a, c, b\}$ で複素 Jordan 代数になる．そして，$a \mapsto P(c)a = \{c, a, c\} =: a^*$ は，$V_1(c)$ に実 Jordan 代数としての involutive な自己同型であり，明らかに $\mathbb{C}$ 反線型である．

$$A(c) := \{a \in V_1(c)\ ;\ a^* = a\}$$

は $V_1(c)$ の実型（複素化が $V_1(c)$ に等しい）で，やはり Euclid 型の Jordan 代数になる．そこで，$\Omega := \mathrm{Int}\{a \underset{c}{\cdot} a\ ;\ a \in A(c)\}$ とおくと，Ω は自己双対な開凸錐になっている．

例 13.2. 先の例 $V = \mathrm{Mat}(p \times q, \mathbb{C})$ で考える．極大 tripotent としては，例 7.5 と同様に $c = \big(I_p\,|\,O\big)$ を考える．対応する Peirce 空間は

$$V_1(c) = \big(\ \mathrm{Mat}(p\times p, \mathbb{C})\ \big|\ O\ \big), \qquad V_{\frac{1}{2}}(c) = \big(\ O\ |\ \mathrm{Mat}(p \times (q-p), \mathbb{C})\ \big).$$

となる．例 7.5 と同様にして，$a \in \mathrm{Mat}(p \times p, \mathbb{C})$ のとき

$$\big(\ a\ |\ O\ \big)^* = \big(\ a^*\ |\ O\ \big)$$

であるから

$$A(c) = \big(\ \mathrm{Herm}(p \times p, \mathbb{C})\ \big|\ O\ \big).$$

このとき，$\Omega = \mathrm{Herm}(p \times p, \mathbb{C})^{++}$（正定値）となる．

一般の Hermitian JTS $(V, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ に戻り，c を V の極大 tripotent とする．各 $a \in V_1(c)$ に対して，

$$\varphi(a)x := 2\{a, c, x\} \qquad (x \in V_{\frac{1}{2}}(c))$$

とおくと，$\varphi(a) \in \mathrm{End}(V_{\frac{1}{2}}(c))$ であり，$V_1(c) \ni a \mapsto \varphi(a) \in \mathrm{End}(V_{\frac{1}{2}}(c))$ は，複素 Jordan 代数 $V_1(a)$ の $*$ 表現になっている：

$$\begin{cases} (1)\ \varphi(a \underset{c}{\cdot} b) = \frac{1}{2}(\varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b)\varphi(a)), \\ (2)\ \varphi(a^*) = \varphi(a)^* \quad (\varphi(a) \text{ の共役作用素}). \end{cases}$$

各 $x, y \in V_{\frac{1}{2}}(c)$ に対して

$$(\varphi(a)x \,|\, y) = (a \,|\, \Phi(y, x)) \qquad (\forall a \in V_1(c))$$

が成り立つように $\Phi(y, x) \in V_1(c)$ を定めると，命題 7.4 (1) の証明から，

$$\Phi(y, x) = 2\{y, x, c\} \qquad (y, x \in V_{\frac{1}{2}}(c))$$

がわかる．このとき，$\Phi : V_{\frac{1}{2}}(c) \times V_{\frac{1}{2}}(c) \to V_1(c)$ は，sesqui-linear（第 1 変数に対して $\mathbb{C}$ 線型，第 2 変数に関して $\mathbb{C}$ 反線型）で Hermitian な写像である：

$$\Phi(x, y) = \Phi(y, x)^*.$$

さらに，$x \neq 0$ ならば，$\Phi(x, x) \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$（この性質を **$\Omega$-positive** であるという）となる．以上の性質から，Siegel 領域（複素の領域になる）

$$D(\Omega, \Phi) := \{x + a \,;\, x \in V_{\frac{1}{2}}(c),\, a \in V_1(c),\, \mathrm{Im}\, a - \Phi(x, x) \in \Omega\}$$

が定義される．V のスペクトルノルム $\|v\|_\infty$ も同様に定義され，それの開単位球

$$\mathcal{D} := \{z \in V \,;\, \|z\|_\infty < 1\}$$

を考えると，「Cayley 変換」によって，$D(\Omega, \Phi)$ と $\mathcal{D}$ とは，biholomorphic に写り合う．