数 学 概 論 I ： 定 期 試 験

１ 枚 目（５枚あります）

2011 年 2 月 8 日 (13:00〜15:00)

学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

[**1**]　次の各整級数の収束半径を求めよ：

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, x^n,$　　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} x^n$

数 学 概 論 I ： 定 期 試 験

２ 枚 目（５枚あります）　　2011 年 2 月 8 日 (13:00〜15:00)

学生番号　　　　　　　　　　　　氏名

[**2**]　(1) $x \to 0$ のとき，$\sin^2 x = x^2 + o(x^3)$ であることを示せ.
(2) a, b, c は定数であるとする．$x \to 0$ のとき，

$$e^x - (a\cos x + b\sin x + c\sin^2 x)$$

が最も高位の無限小になるように，a, b, c を定めよ．そのときは，実際何位の無限小か.

数 学 概 論 I ： 定 期 試 験

３ 枚 目（５枚あります） 2011 年 2 月 8 日 (13:00〜15:00)

学生番号 氏名

[**3**] (1) 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$ であることを示せ．

(2) 逆に $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$ ならば，数列 $\{a_n\}$ は収束するか．成り立つならば証明し，成り立たないならば反例をあげよ．

数 学 概 論 I ： 定 期 試 験

４ 枚 目（５枚あります）　　2011 年 2 月 8 日 (13:00〜15:00)

学生番号　　　　　　　　　　　氏名

[**4**]　正数の列 $\{a_n\}$ は $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ をみたしているとする．このとき，函数列

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + a_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

は $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示せ．

数 学 概 論 I ： 定 期 試 験

５ 枚 目（最後のページです） 2011 年 2 月 8 日 (13:00〜15:00)

学生番号 氏名

[**5**] 交代級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n}$ は収束するが，絶対収束はしないことを示せ．