数 学 概 論 I ： 中 間 試 験

1 枚 目（5枚あります）　　2010 年 12 月 7 日出題

学生番号　　　　　　　　　　氏名

[**1**]　次の数列 $\{a_n\}$ の上限，下限，上極限，下極限を求めよ．

$$a_n := \begin{cases} \dfrac{m+1}{m} & (n = 2m-1; m = 1, 2, \ldots) \\ (-1)^{m-1}\dfrac{1}{m} & (n = 2m; m = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

数 学 概 論 I ： 中 間 試 験

２ 枚 目（５枚あります）　　2010 年 12 月 7 日出題

学生番号　　　　　　　　　　氏名

[**2**] 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は，すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ をみたし，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$ となっていると仮定する．

(1) ある番号から先は $b_n < \frac{1}{2}a_n$ となっていることを示せ．

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{b_n}}{e^{a_n}} = 0$ であることを示せ．

数 学 概 論 I ： 中 間 試 験

3 枚 目（5枚あります）

2010 年 12 月 7 日出題

学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

[**3**]　$0 \leqq r < 1$ とする．数列 $\{a_n\}$ が次の条件をみたすならば，$\{a_n\}$ は Cauchy 列であることを示せ：ある自然数 N が存在して，任意の $n \geqq N$ に対して

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqq r|a_{n+1} - a_n|.$$

数 学 概 論 I ： 中 間 試 験

４ 枚 目（５枚あります）　　2010 年 12 月 7 日出題

学生番号　　　　　　　　　氏名

[**4**]　a_n がそれぞれ次式で与えられる正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束・発散を判定せよ.

(1) $a_n := \dfrac{1}{n^2+2n-2}$　　　(2) $a_n := \dfrac{1}{\log(n+1)}$

数 学 概 論 I ： 中 間 試 験

５ 枚 目（最終ページ）　2010 年 12 月 7 日出題

学生番号　氏名

[**5**]　(1) 双曲線余弦函数 $\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ を整級数で表示せよ.

(2) すべての実数 x に対して，不等式 $\cosh x \leqq e^{\frac{x^2}{2}}$ が成り立つことを示せ.