数学特論8（学部）表現論大意（大学院）　レポート問題

出題：2009 年 7 月 22 日　　（担当：野村隆昭）

$*$ [**1**] ～ [**3**] のすべてに解答すること．
$*$ <u>A4 レポート用紙</u>にて数理事務室（理学部本館 4 階）に提出のこと．

<u>提出期限</u>：2009 年 8 月 7 日 (金) 17 時　厳守

---

n 次の実対称行列のなす実ベクトル空間を V とする：$V := \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$.

[**1**] (1) $\langle\, x \,|\, y \,\rangle := \mathrm{tr}(xy)$ は V に内積を定義することを示せ．

以下，V はこの内積から決まるノルム $\|x\| := \sqrt{\langle\, x \,|\, x \,\rangle}$ でノルム空間と見る．

(2) V に属する行列で，正定値なもの全体がなす集合を Ω とする．Ω は凸錐で，しかも開集合であることを示せ．

(3) $x \in V$ とするとき

$$x \in \Omega \iff \mathrm{tr}(xy) > 0 \quad (\forall y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})$$

であることを示せ．ただし，$\overline{\Omega}$ は Ω の閉包を表す．

(4) n 次の一般線型群 $G := GL(n, \mathbb{R})$ は，$\rho(g)x := gx^tg$ $(x \in V)$ で $\rho(g) \in GL(V)$ を定義するとき，Ω に推移的に作用していることを示せ．

(5) G の部分群 $H := \left\{ \begin{pmatrix} h_{11} & & 0 \\ & h_{22} & \\ * & & \ddots \\ & & & h_{nn} \end{pmatrix} \,\middle|\, h_{11} > 0, h_{22} > 0, \ldots, h_{nn} > 0 \right\}$ は問 (4) の ρ により，Ω に単純推移的に（固定部分群は単位元のみ）作用していることを示せ．

[**2**] 問題 [1] の記号を踏襲する．

(1) $h \in H$ の (j, i) 成分 $(i \leqq j)$ を h_{ji} とする．$x = h^th$ とし，x の (i, j) 成分を x_{ij} とするとき，$|h_{ji}| \leqq \sqrt{x_{jj}}$ $(i \leqq j)$ であることを示せ．

(2) $x \in V$ に対して，左上の k 次小行列式を $\Delta_k(x)$ とする：$\Delta_k(x) := \det \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{pmatrix}$.
$h \in H$ のとき，$\Delta_k(h^th) = h_{11}^2 \cdots h_{kk}^2$ であることを示せ．

(3) 各 $x \in \Omega$ と $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\Delta_{\mathbf{s}}(x) := \Delta_1(x)^{s_1 - s_2} \cdots \Delta_{n-1}(x)^{s_{n-1} - s_n} \Delta_n(x)^{s_n}$$

とおく．Ω の点列 $\{x^{(k)}\}$ が $x \in \partial\Omega$（Ω の境界）に近づくとき，必ず $\Delta_{\mathbf{s}}(x^{(k)}) \to 0$ となるための必要十分条件は $s_j > 0$ $(\forall j = 1, \ldots, n)$ であることを示せ．

裏面に続く

[**3**] 前問までの記号をそのまま使うことにする．

(1) W を V の複素化とする．$W=\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ である．$U:=\mathbb{C}^n$（縦ベクトル）とし，そこでの標準的なエルミート内積を $(\cdot\,|\,\cdot)_{\mathbb{C}^n}$ で表す．各 $u,u'\in U$ を固定するとき，$W\ni w\mapsto (wu\,|\,u')_{\mathbb{C}^n}$ は W 上の複素線型形式であるから，一意的に $w'\in W$ が定まって，$\mathrm{tr}(ww')=(wu\,|\,u')_{\mathbb{C}^n}$ となる．この w' は $u,u'\in U$ に対して一意的に定まるので，$w'=Q(u,u')$ と表す．$(u\,|\,u')_{\mathbb{C}^n}=\mathrm{tr}(u(u')^*)$ と書けることに注意して，$Q(u,u')=\frac{1}{2}\bigl(u(u')^*+\overline{u'}\,{}^t u\bigr)$ であることを示せ．そして，$Q:U\times U\to W$ は Hermitian sesqui-linear で，しかも Ω-positive であることを示せ．

以上のデータから，Siegel 領域 $D=D(\Omega,Q)$ を定義する：

$$D:=\{(u,w)\in U\times W\,;\,\mathrm{Im}\,w-Q(u,u)\in\Omega\}.$$

(2) $h\in H$ と問 (1) の Q に対して，

$$\rho(h)\bigl(Q(u,u')\bigr)=Q(hu,\,hu')\qquad(u,u'\in U)$$

が成立することを示せ．

(3) N_Q は記号 $n(a,b)$ $(a\in V,\,b\in U)$ の全体に

$$n(a,b)n(a',b'):=n(a+a'+2\,\mathrm{Im}\,Q(b,b'),\,b+b')$$

で積を定義したものとする．N_Q は群をなすことを示せ．

(4) 各 $h\in H$ に対して，N_Q 上の写像 $\alpha(h)$ を $\alpha(h)(n(a,b))=n(\rho(h)a,\,hb)$ で定義する．このとき，$h\mapsto\alpha(h)$ は H から N_Q の自己同型群 $\mathrm{Aut}(N_Q)$ への準同型であることを示せ．

(5) 直積集合 $N_Q\times H$ に，

$$(n(a,b),h)(n(a',b'),h'):=(n(a,b)n(\rho(h)a',hb'),hh')$$

で積を入れると，群をなしていて，N_Q と $N_Q\times\{I\}$（I は n 次の単位行列）を同一視するとき，N_Q は正規部分群になっていることを示せ．(この群を N_Q と H の半直積といい，$N_Q\rtimes H$ で表す)．

(6) $n(a,b)\in N_Q,\,h\in H$ のとき

$$(n(a,b),h)\cdot(u,w):=\bigl(hu+b,\,\rho(h)w+a+iQ(b,b)+2iQ(hu,b)\bigr)\quad((u,w)\in D)$$

とおくと，これは $N_Q\rtimes H$ の D への作用を定義していて，この作用は単純推移的であることを示せ．

以上