

数 学 特 論 講 義 ノ 一 卜

(2009年度前期)

等質錐と等質 Siegel 領域

野 村 隆 昭

目次

§1.	Siegel 領域 (Introduction)	1
§2.	開凸錐	6
§3.	等質開凸錐	10
§4.	自己双対ではない等質開凸錐	16
§5.	等質開凸錐とクラン	20
§6.	等質 Siegel 領域	25
§7.	Siegel 領域の affine 変換群	29
§8.	Affine 等質な Siegel 領域	32
§9.	複素構造	36
§10.	認容線型形式の存在	43
§11.	正規 j 代数からの等質 Siegel 領域の構成	49
§12.	等質チューブ領域の Cayley 変換	56
§13.	等質 Siegel 領域の Cayley 変換	60

§1. Siegel 領域 (Introduction)

導入は Piatetski-Shapiro¹ による (1957 年). Siegel 領域は

- 複素ユークリッド空間 \mathbb{C}^n の領域,
- \mathbb{C} の上半平面の一般化 (高次元化, 多変数化, 行列変数化),
- 有界領域に正則同相² となっている.

例 1. $V = \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ (r 次の実対称行列のなす実ベクトル空間) とする. 自然に V は $\mathbb{R}^{r(r+1)/2}$ と同一視される. 実対称行列は, その固有値がすべて正数であるとき, 正定値であると言われることを思い出しておいて,

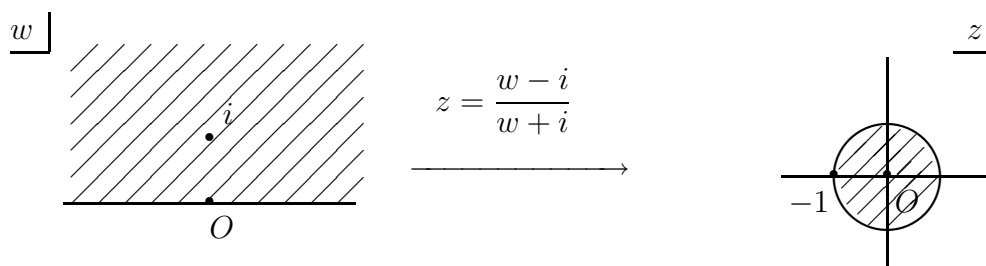
$$(1.1) \quad \Omega := \{x \in V; x \gg 0 \text{ (} x \text{ は正定値)}\}$$

とおく. Ω は V の開集合で, さらに錐³をなし, 凸集合⁴でもある. このとき, $V_{\mathbb{C}} = \text{Sym}(r, \mathbb{C})$ (r 次の複素対称行列のなす複素ベクトル空間で自然に $\mathbb{C}^{r(r+1)/2}$ と同一視される) 内の領域 $V + i\Omega$ を Siegel 上半空間と呼ぶ. これは以下で導入する Siegel 領域の典型的な例である.

$r = 1$ のときは, $V = \mathbb{R}$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ であるから,

$$V + i\Omega = \{x + iy; x \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

となって, 複素平面内の上半平面である. Cayley 変換と呼ばれる次の写像を考えよう:



この変換により, 上半平面は単位円の内部という有界領域に写っている.

¹2009 年 2 月 21 日に 79 歳で亡くなった.

²有界領域への全単射 φ で, φ, φ^{-1} がともに正則となるものが存在するという事. ここで $\varphi(z_1, \dots, z_n) = (\varphi_1(z_1, \dots, z_n), \dots, \varphi_n(z_1, \dots, z_n))$ が正則写像であるとは, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ のすべてが正則関数であること.

³ $x \in \Omega \implies \lambda x \in \Omega$ for $\forall \lambda > 0$

⁴ $x, y \in \Omega \implies \lambda x + (1 - \lambda)y \in \Omega$ for $\forall \lambda$ with $0 \leq \lambda \leq 1$.

一般の r のときの Cayley 変換は

$$z = (w - ie)(w + ie)^{-1} \quad (e \text{ は } r \text{ 次の単位行列})$$

で与えられ, この変換により, Siegel 上半空間は, **Siegel disk** と呼ばれる次のように記述される有界領域に写っている:

$$\{z \in \text{Sym}(r, \mathbb{C}); e - zz^* \gg 0\} \quad (z^* := \overline{z}^t)$$

(条件は $e - zz^*$ というエルミート行列⁵が正定値⁶であるということ). 実際簡単な計算で, $w = i(e + z)(e - z)^{-1}$ と書けるので

$$\text{Im } w = \text{Re}(e + z)(e - z)^{-1} = (e - z)^{-1}(e - zz^*)(e - z^*)^{-1}$$

である. これより「 $\text{Im } w \gg 0 \iff e - zz^* \gg 0$ 」が出る. 詳細は読者に委ねよう.

例 2. (階数⁷が 1 の Siegel 領域)

$$D := \{(u, w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}; \text{Im } w - \|u\|^2 > 0\}.$$

ここで, $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{C}^m$ に対して, $\|u\|^2 := |u_1|^2 + \dots + |u_m|^2$ (ユークリッド・ノルム) である. $m = 0$ のときは, D は \mathbb{C} の上半平面であるので, これは例 1 とは違った方向への \mathbb{C} の上半平面の一般化である. 天下りではあるが, 次の写像 \mathcal{C} (やはり Cayley 変換と呼ばれる) を考えよう:

$$\mathcal{C}(u, w) := \left(\frac{2u}{w+i}, \frac{w-i}{w+i} \right) \quad ((u, w) \in D).$$

容易に等式

$$1 - \|\mathcal{C}(u, w)\|^2 = 1 - \left(\frac{4\|u\|^2}{|w+i|^2} + \frac{|w-i|^2}{|w+i|^2} \right) = \frac{4}{|w+i|^2} (\text{Im } w - \|u\|^2)$$

を導けるので, \mathcal{C} による D の像 $\mathcal{C}(D)$ は \mathbb{C}^{m+1} の開単位球であることがわかる:

$$\mathcal{C}(D) = \{z \in \mathbb{C}^{m+1}; \|z\| < 1\}.$$

例 3. 後で正式に定義するが, ここで一般の Siegel 領域の定義を与えておこう:

$$D := \{(u, w) \in U \times V_{\mathbb{C}}; \text{Im } w - Q(u, u) \in \Omega\}.$$

⁵複素行列 z がエルミートであるとは, $z^* = z$ となること.

⁶エルミート行列の固有値はすべて実数であり, それらがすべて正のとき, そのエルミート行列は正定値であるという.

⁷ここでは「階数」というのは未定義用語であるが, 適当に無視してもらって構わない.

ここで、 U は複素ベクトル空間、 V は実ベクトル空間、 $V_{\mathbb{C}}$ は V の複素化を表す。 Ω は V の開凸錐で、直線を全く含まない⁸ものとする。 $Q: U \times U \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ はベクトル値のエルミート形式、すなわち、 $Q(u_1, u_2)$ は u_1 に関して複素線型、 u_2 に関して複素反線型⁹で、

$$Q(u_2, u_1) = \overline{Q(u_1, u_2)} \quad (u_1, u_2 \in U)$$

となるものとする。バーは $V_{\mathbb{C}}$ における実型 V に関する共役である：

$$\overline{v_1 + iv_2} = v_1 - iv_2 \quad (v_1, v_2 \in V).$$

さらに Q は Ω -positive、すなわち次をみたすとする¹⁰： $\bar{\Omega}$ は Ω の閉包を表すとして

$$Q(u, u) \in \bar{\Omega} \setminus \{0\} \quad (\forall u \in U \setminus \{0\}).$$

ここでは $U = \{0\}$ となってしまうことを排除しない。 $U = \{0\}$ のときは $D = V + i\Omega$ であり、これをチューブ領域（あるいは第1種の Siegel 領域）と呼ぶ。第1種でない Siegel 領域を第2種の Siegel 領域と呼ぶ。

注意. $n \geq 2$ のとき、 \mathbb{C}^n の開球はチューブ領域 $V + i\Omega$ とは決して正則同相にならない¹¹ことが示される。Piatetski-Shapiro の Siegel 領域導入の動機は、保型函数論への応用で、エルミート対称空間のチューブ型の領域としての実現が必要であったことによる。

一方で等質有界領域について、E. Cartan が1935年まで精力的に研究を行ってきた。

\mathbb{C}^1 での (等質) 有界領域とは？ Riemann の写像定理（弱い形で十分）を使うと、Jordan 閉曲線（区分的に滑らかな単純閉曲線）で囲まれた有界領域 D は、単位円の内部 \mathbb{D} に正則同相であることがわかる。正則同相写像 $\varphi: D \rightarrow \mathbb{D}$ を modulo にして、単位円の内部 \mathbb{D} が理解できればよいということになる。

次元を上げる前に用語の定義が必要である。 \mathbb{C}^n の領域 D を考える。

$$\text{Hol}(D) := \{g: D \rightarrow D; \text{全単射正則で } g^{-1} \text{ も正則}\}$$

⁸半平面のようなものを排除して考えることにしている。

⁹ u_2 を $\lambda \in \mathbb{C}$ 倍すると、 Q が $\bar{\lambda}$ 倍される。

¹⁰ $V = \mathbb{R}$ で Ω が正数全体のとき、 Ω -positive であることは、正定値であることを意味している。

¹¹Shilov 境界と呼ばれる特別な境界の次元を比べることによりわかる。

とおく. $\text{Hol}(D)$ は写像の合成を積として群をなす. 恒等写像が単位元であり, 逆写像が逆元である. さらに各コンパクト集合上での一様収束で位相を入れる¹²と, これは位相群¹³になる. さらに D が有界領域に正則同相ならば, $\text{Hol}(D)$ は有限次元の Lie 群¹⁴になることがわかっている.

定義. 領域 D が等質であるとは, $\text{Hol}(D)$ が D に推移的に働くことをいう. すなわち, 任意の $z_1, z_2 \in D$ に対して, $g \in \text{Hol}(D)$ が存在して, $g \cdot z_1 = z_2$ となることをいう.

定義. 領域 D が対称であるとは, 任意の $z \in D$ に対して, 次の2条件をみたす $\sigma_z \in \text{Hol}(D)$ が存在することである:

(1) $\sigma_z \circ \sigma_z = \text{Id}_D$, (2) z は σ_z の孤立固定点.

例 4. 開単位円板 \mathbb{D} は等質有界領域で, 対称である. 実際次の行列の群を考えてみる ($SU(1,1)$ と表される):

$$SU(1,1) := \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}; \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

各 $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$ に対して, 次の一次分数変換 φ_g を考える:

$$(1.2) \quad \varphi_g(z) := \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

このとき, $\varphi_g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ であって,

$$\begin{cases} \varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}, \\ \varphi_e = \text{Id}_{\mathbb{D}} \text{ (}\mathbb{D}\text{ の恒等写像)} \quad (e \text{ は単位行列}). \end{cases}$$

言い換えると, $SU(1,1)$ から $\text{Hol}(\mathbb{D})$ への群準同型が得られている. その核は $\{\pm e\}$ であることも容易にわかる.

\mathbb{D} が等質であることをみよう. (1.2) において, $\varphi_g(0) = \frac{\beta}{\bar{\alpha}}$ であるから, これが任意の $z = re^{i\theta}$ ($0 \leq r < 1$) となり得ることは容易に確かめられよう. さて任意に $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ が与えられたとき, $g_1, g_2 \in SU(1,1)$ が見つかって, $\varphi_{g_j}(0) = z_j$ ($j = 1, 2$)

¹²compact-open topology と呼ばれる

¹³群でありしかも位相空間である集合 G が位相群であるとは, 群演算 $G \times G \ni (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 \rightarrow G$ 及び $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ が連続であるということ.

¹⁴群であると同時に多様体でもある集合が Lie 群であるとは, 群演算 (かけ算と逆元をとるという写像) が実解析的になることである.

となるわけであるが、 $\varphi = \varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_1}^{-1} \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ が z_1 を z_2 に写すことは明らかである。

次に、 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ が対称領域であることを見よう。 $\sigma_0(w) := -w$ ($w \in \mathbb{D}$) とおくと、 $\sigma_0 \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ であって、 $\sigma_0 \circ \sigma_0 = \text{Id}_{\mathbb{D}}$ であり、

$$\sigma_0(w) = w \iff -w = w \iff w = 0$$

となっている。すなわち原点は σ_0 の一意な固定点である。一般の $z \in \mathbb{D}$ に対しては、先に証明したことを使って、まず $g \in SU(1,1)$ を見つけて $\varphi_g(0) = z$ としておく。 $\sigma_z := \varphi_g \circ \sigma_0 \circ \varphi_g^{-1}$ とおくと、 $\sigma_z \circ \sigma_z = \text{Id}_{\mathbb{D}}$ であり、簡単な計算で z が σ_z の一意な固定点になっていることがわかる。 //

E. Cartan による結果 (1935) : \mathbb{C}^2 及び \mathbb{C}^3 の任意の等質有界領域は対称である。

Cartan の問題 : \mathbb{C}^n ($n \geq 4$) ではどうか。

Piatetski-Shapiro の結果 (1959) : \mathbb{C}^4 及び \mathbb{C}^5 で対称でない等質 Siegel 領域を構成した。従って、 \mathbb{C}^4 や \mathbb{C}^5 では対称でない等質有界領域が存在する。

● 後の研究で、 $n \geq 4$ ならば \mathbb{C}^n に非対称な等質 Siegel 領域が存在することが示された。しかも $n \geq 7$ ならば、連続パラメータを持った、互いに正則同相ではない等質 Siegel 領域が \mathbb{C}^n に存在することがわかった（最も予期しなかった Siegel 領域の応用であると Piatetski-Shapiro は後年になって述懐している）。

注意. 俗に言われているような、「任意の等質有界領域は対称である」などという「予想」を E. Cartan は立ててはいない¹⁵。Cartan は、「高次元の非対称等質有界領域の存在を否定するものは何もないし、その発見は何か新しいアイデアに支えられたものに違いない」と書いたのであって、これを Cartan の予想というのであれば、Cartan の予想は全く正しかったのである。

さて上述の \mathbb{C}^4 や \mathbb{C}^5 における非対称 Siegel 領域の例は、第2種のものであった。第1種の Siegel 領域、すなわちチューブ領域で非対称なものを構成するには、自己

¹⁵1950年代後半は、Borel や Koszul の研究結果（半単純 Lie 群の等質空間になっているような有界領域は対称である）や、その後の Hano による一般化（半単純という仮定をユニモジュラーという仮定に弱めた）もあって、高次元においても対称でない等質有界領域は存在しないのではないかという雰囲気であったらしい。Piatetski-Shapiro 自身もそういう感触を抱いていたと述べている。おそらくこういう雰囲気の中で、Cartan の予想なるものがでっち上げられたのかもしれない。Cartan の（少々古めかしい）フランス語の原論文を読めばそんな予想は書かれてないことは直ちに確かめられることであるのに...

双対でない等質開凸錐が必要である。実ベクトル空間 V にある開凸錐 Ω に対して、 V の双対ベクトル空間 V^* の部分集合

$$\Omega^* := \{\lambda \in V^* ; \langle \lambda, x \rangle > 0 \ (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})\}$$

を考える。 Ω^* も開凸錐であることが示せて、 Ω の双対錐と呼ばれる。 V に内積を定義して、その内積で V と V^* を同一視すると、 $\Omega^* = \Omega$ となるとき、 Ω は自己双対であると言われる。

例 5. $V = \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ とし、 Ω は (1.1) で定義される開凸錐とする。この Ω は自己双対である。すなわち

$$\Omega = \{y \in V ; \text{tr}(xy) > 0 \ (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})\}$$

が成り立つ。言い換えると、 $\text{tr}(xy)$ は V に内積を定義し、この内積によって V^* と V を同一視するとき、 $\Omega^* = \Omega$ となっているのである。

等質¹⁶開凸錐の代数的な理論は Vinberg によって 1963 年に構築された。 $n \geq 5$ ならば \mathbb{R}^n に自己双対でない等質開凸錐が存在し、 $n \geq 11$ ならば、互いに線型同値ではないような、連続無限個の自己双対ではない等質開凸錐が \mathbb{R}^n に存在することがわかっている。

§2. 開凸錐

V を有限次元実ベクトル空間とする。

定義. (1) $\emptyset \neq \Omega \subset V$ が錐 (cone) $\stackrel{\text{def}}{\iff} x \in \Omega, \lambda > 0$ ならば $\lambda x \in \Omega$.

(2) $\Omega \subset V$ が凸 (convex) $\stackrel{\text{def}}{\iff} x, y \in \Omega$ かつ $0 \leq \lambda \leq 1$ ならば $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \Omega$.

(3) 凸錐とは、凸集合であるような錐のことである。

注意. \mathbb{R}^2 で、 $\{(x, 0) ; x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) ; y \in \mathbb{R}\}$ (x 軸と y 軸の和集合) は錐であるが、凸集合ではない。

以下 V にはノルムが定義されているとする。これにより V は距離空間になる。 V の部分集合 Ω が錐 (resp. 凸) ならば、その閉包 $\overline{\Omega}$ も錐 (resp. 凸) であることは

¹⁶開凸錐の等質性の定義は後の節できちんと定義する。

容易にわかる. V^* を V の双対ベクトル空間 (V 上の線型形式のなすベクトル空間) とする. V^* は

$$\|\lambda\| := \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle \lambda, x \rangle|$$

によりノルム空間になる. このとき, 不等式

$$|\langle \lambda, x \rangle| \leq \|\lambda\| \|x\| \quad (\lambda \in V^*, x \in V)$$

が成立する.

定義. Ω を凸錐でしかも開集合である (開凸錐と呼ぶ) とする.

- (1) Ω が正則 (**regular**) であるとは, Ω が直線¹⁷を一つも含まないことである.
 (2) Ω^* を次で定義される集合とする:

$$\Omega^* := \{ \lambda \in V^* ; \langle \lambda, x \rangle > 0 \text{ for all } x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \}.$$

Ω^* が空集合でなければ, Ω^* は凸錐になっていることは容易にわかる.

補題 2.1. Ω^* は開集合である.

証明. $\Omega^* \neq \emptyset$ のときが問題. $\lambda_0 \in \Omega^*$ とする. $S := \{x \in V ; \|x\| = 1\}$ とおいて,

$$\delta := \min_{x \in S \cap \overline{\Omega}} \langle \lambda_0, x \rangle$$

おく. $\lambda_0 \in \Omega^*$ と $S \cap \overline{\Omega}$ のコンパクト性から, $\delta > 0$ である. $\|\lambda\| < \frac{\delta}{2}$ のとき, 任意の $x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して

$$\langle \lambda_0 + \lambda, x \rangle \geq \|x\| \left\langle \lambda_0, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle - |\langle \lambda, x \rangle| \geq \left(\delta - \frac{\delta}{2} \right) \|x\| = \frac{\delta}{2} \|x\| > 0.$$

ゆえに $\lambda_0 + \lambda \in \Omega^*$. これは λ_0 の $\frac{\delta}{2}$ 近傍が Ω^* に含まれていることを示しているから, Ω^* は開集合である. \square

以下 Ω は V の開凸錐とする. もし $0 \in \Omega$ ならば, 0 は Ω は内点になって, 凸錐ということから $\Omega = V$ となってしまうことに注意.

定理 2.2. Ω : 正則 $\iff \Omega^* \neq \emptyset$.

注意. $\Omega^* \neq \emptyset$ ならば Ω が正則であることは容易にわかる. 実際, $\lambda \in \Omega^*$ とする. もし直線 $\{a + tb ; t \in \mathbb{R}\}$ が Ω に含まれるならば, $0 \neq b = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t}(a + tb) \in \overline{\Omega}$ より, $\langle \lambda, b \rangle > 0$. これより, $t < 0$ の絶対値が十分大きければ, $\langle \lambda, a + tb \rangle = \langle \lambda, a \rangle + t \langle \lambda, b \rangle < 0$ となるので矛盾.

¹⁷ $\{a + tb ; t \in \mathbb{R}\}$ ($a, b \in V, b \neq 0$) という形の集合

- 正則な開凸錐 Ω に対して, Ω^* を Ω の双対凸錐と呼ぶ.

定理 2.3. 自然な同一視 $V^{**} = V$ のもとで, $\Omega^{**} = \Omega$ である.

例. $V := \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ とし, V には $\langle x | y \rangle := \text{tr}(xy)$ で内積を入れておく. このとき, $x = (x_{ij}) \in V$ ($x_{ji} = x_{ij}$) とすると,

$$\|x\|^2 = \text{tr}(x^2) = \sum_{j=1}^r x_{jj}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} x_{ij}^2.$$

V に属する行列で正定値なもの全体を Ω とする. このとき,

$$\bar{\Omega} = \{V \text{ に属する行列で半正定値 (固有値はすべて非負) なもの}\}$$

となる. \mathbb{R}^r の標準内積を $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^r}$ で表す.

補題 2.4. $x \in V$ とする. このとき,

$$x \text{ が正定値} \iff \text{任意の } \xi \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\} \text{ に対して, } \langle x\xi | \xi \rangle_{\mathbb{R}^r} > 0.$$

証明. $x \in V$ の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ とする. このとき, x の固有ベクトルからなる \mathbb{R}^r の正規直交基底を e_1, \dots, e_r をとって, $\xi = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_r e_r$ とすると

$$\langle x\xi | \xi \rangle_{\mathbb{R}^r} = \sum_{i,j} \xi_i \xi_j \langle x e_i | e_j \rangle_{\mathbb{R}^r} = \sum_{j=1}^r \lambda_j \xi_j^2.$$

これより直ちに補題が従う. □

命題 2.5. Ω は正則な開凸錐である.

証明. Ω が錐であることは明らか. そして凸であることは補題 2.4 から言える: 実際, $x, y \in \Omega$, $0 \leq \lambda \leq 1$ のとき, 任意の $\xi \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ に対して

$$\langle (\lambda x + (1 - \lambda)y)\xi | \xi \rangle_{\mathbb{R}^r} = \lambda \langle x\xi | \xi \rangle_{\mathbb{R}^r} + (1 - \lambda) \langle y\xi | \xi \rangle_{\mathbb{R}^r} > 0.$$

開集合であることは, 固有値の連続性より. さらに $\text{tr} : x \mapsto \text{tr}(x)$ という線型形式に対して, $\text{tr}(x) > 0$ ($\forall x \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}$) となるから, $\text{tr} \in \Omega^*$ である. よって, Ω は正則である. □

注意. V の内積 $\langle x | y \rangle = \text{tr}(xy)$ によって V^* と V を同一視して, そのもとで Ω^* を定義する. すなわち

$$\Omega^* := \{y \in V ; \text{tr}(yx) > 0 \quad (\forall x \in \bar{\Omega} \setminus \{0\})\}$$

と定義すると, $\Omega^* = \Omega$ が成り立つ. 適当な内積に関して $\Omega^* = \Omega$ となるような開凸錐 Ω を, 自己双対 (selfdual) であるという.

例. \mathbb{R}^n において一つの基底 e_1, \dots, e_n (必ずしも正規直交ではない) をとり

$$\Omega(e_1, \dots, e_n) := \left\{ \sum_{j=1}^n t_j e_j ; t_j > 0 (j = 1, \dots, n) \right\}$$

とおく (第1象限). $\Omega(e_1, \dots, e_n)$ は明らかに開凸錐で, 半直線 $\mathbb{R}_{>0}$ の直積になっている. その双対凸錐 $\Omega(e_1, \dots, e_n)^*$ を, \mathbb{R}^n の標準内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ に関して定義する:

$$\Omega(e_1, \dots, e_n)^* := \{ y \in \mathbb{R}^n ; \langle y | x \rangle_{\mathbb{R}^n} > 0 \quad (\forall x \in \overline{\Omega(e_1, \dots, e_n)} \setminus \{0\}) \}.$$

(1) f_1, \dots, f_n を e_1, \dots, e_n に双対な \mathbb{R}^n の基底, つまり $\langle f_i | e_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij}$ をみたすものとする

$$(2.1) \quad \Omega(e_1, \dots, e_n)^* = \Omega(f_1, \dots, f_n)$$

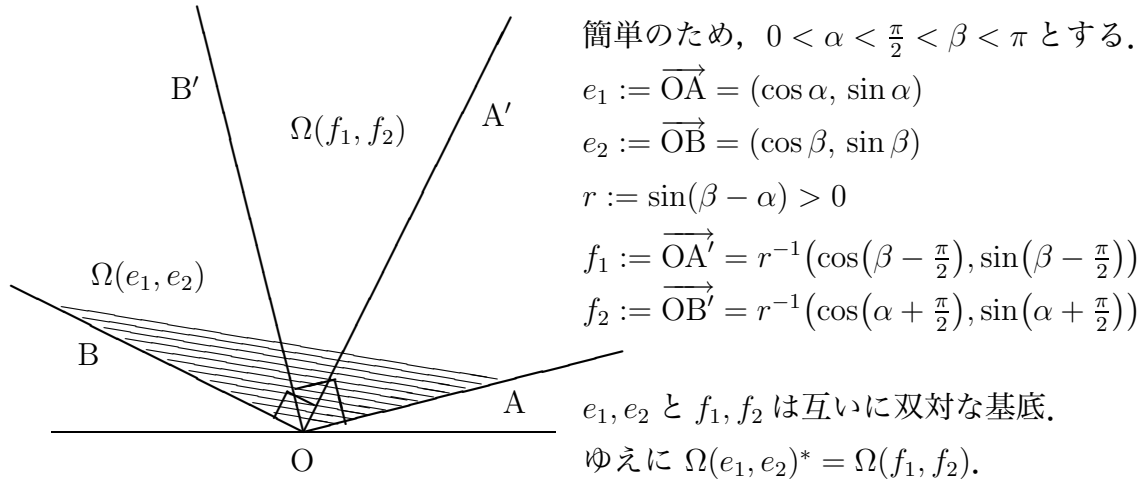
であることを示してみよう. まず明らかに

$$\overline{\Omega(e_1, \dots, e_n)} = \left\{ \sum_{j=1}^n t_j e_j ; t_j \geq 0 (j = 1, \dots, n) \right\}$$

であることに注意. さて $y \in \Omega(e_1, \dots, e_n)^*$ とし, $y = \sum \lambda_j f_j$ と表すと, $e_k \in \overline{\Omega(e_1, \dots, e_n)}$ ($\forall k$) であるから, $0 < \langle y | e_k \rangle = \lambda_k$ ($\forall k$) となって, $y \in \Omega(f_1, \dots, f_n)$. 逆に $y = \sum \lambda_j f_j \in \Omega(f_1, \dots, f_n)$ ならば, $\forall x = \sum t_j e_j \in \overline{\Omega(e_1, \dots, e_n)} \setminus \{0\}$ に対し, $\langle y | x \rangle = \sum \lambda_j t_j$. ここで, 各 $j = 1, \dots, n$ に対して, $\lambda_j > 0$, $t_j \geq 0$ であって, $t_1 = \dots = t_n = 0$ ではないので $\langle y | x \rangle > 0$ となる. よって $y \in \Omega(e_1, \dots, e_n)^*$. //

(2) (1) より, e_1, \dots, e_n が正規直交基底であれば, $\Omega(e_1, \dots, e_n)$ は自己双対である. 逆に, e_1, \dots, e_n を正規直交基底とするような内積を \mathbb{R}^n に入れると, その新たに導入した内積に関して $\Omega(e_1, \dots, e_n)$ は, 自己双対になる.

(3) \mathbb{R}^2 でより詳しく見てみよう.



特に $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{3\pi}{4}$ のとき, $\Omega(e_1, e_2)$ は自己双対である.

§3. 等質開凸錐

以下, V は有限次元実ノルム空間, $GL(V)$ は V 上の正則な線型変換の全体が, 変換の合成を積としてなす Lie 群とする. V の基底を固定しておけば, 行列のなす群 $GL(N, \mathbb{R})$ ($N := \dim V$) と思える. $\Omega \subset V$ を正則開凸錐とする.

定義. $G(\Omega) := \{g \in GL(V) ; g(\Omega) = \Omega\}$ とおいて, $G(\Omega)$ を Ω の線型自己同型群と呼ぶ¹⁸.

$GL(V)$ に属する変換は V の位相同型であることに注意すると, $G(\Omega)$ は線型 Lie 群 $GL(V)$ の閉部分群であることがわかる¹⁹. 従って, $G(\Omega)$ 自身 Lie 群になっている²⁰.

定義. Ω が等質であるとは, $G(\Omega)$ が Ω に推移的に働くときにいう. すなわち

$$\forall x, y \in \Omega, \quad \exists g \in G(\Omega) \text{ s.t. } gx = y.$$

となるときである.

V 上の線型写像 (線型作用素) の全体を $\mathcal{L}(V)$ で表す. $T \in \mathcal{L}(V)$ と $\lambda \in V^*$ に対して, $V \ni x \rightarrow \langle \lambda, Tx \rangle$ は V 上の線型形式, すなわち V^* の元であり, λ によって

¹⁸ $GL(\Omega)$ と書く方が適切かもしれない.

¹⁹ $g_n \in G(\Omega)$ ($n = 1, 2, \dots$) かつ $g_n \rightarrow g \in GL(V)$ ならば $g \in G(\Omega)$

²⁰「Lie 群の閉部分群は相対位相で Lie 群である」という定理による.

一意に定まっているので、これを $T^*\lambda$ で表す。明らかに、 $T^* : V^* \ni \lambda \mapsto T^*\lambda \in V^*$ は線型である。 $T^* \in \mathcal{L}(V^*)$ を T の共役作用素と呼ぶ。定義より

$$\langle T^*\lambda, x \rangle = \langle \lambda, Tx \rangle \quad (\lambda \in V^*, x \in V).$$

また、部分集合 $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(V)$ に対して、 $\mathcal{F}^* := \{T^* ; T \in \mathcal{F}\}$ とする。

命題 3.1. $G(\Omega^*) = G(\Omega)^*$.

証明. $g \in G(\Omega)$, $\lambda \in \Omega^*$ とする。任意の $x \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して、 $gx \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}$ であるから、 $\langle g^*\lambda, x \rangle = \langle \lambda, gx \rangle > 0$ 。ゆえに $g^*\lambda \in \Omega^*$ となつて、 $g^*(\Omega^*) \subset \Omega^*$ が示せた。 g の代わりに g^{-1} を用いることにより、 $g^*(\Omega^*) = \Omega^*$ がわかるので、 $g^* \in G(\Omega^*)$ 。すなわち、 $G(\Omega)^* \subset G(\Omega^*)$ 。以上の議論を Ω^* に適用して、 $G(\Omega^*)^* \subset G(\Omega^{**}) = G(\Omega)$ 。これは $G(\Omega^*) \subset G(\Omega)^*$ を意味する。よつて、 $G(\Omega^*) = G(\Omega)^*$ 。□

一点 $a \in \Omega$ での固定部分群を $G(\Omega)_a$ で表す： $G(\Omega)_a := \{g \in G(\Omega) ; ga = a\}$ 。

命題 3.2. $G(\Omega)_a$ は $G(\Omega)$ のコンパクト部分群である。

証明は省略しよう。 Ω が等質であれば、 Ω は商空間 $G(\Omega)/G(\Omega)_a$ と微分同相になる。

例 3.3 (Lorentz 錐)。 $n \geq 2$ とする。

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n ; x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 > 0, x_1 > 0\}.$$

明らかに Ω は開凸錐で、 Ω を **Lorentz 錐** (光錐とも呼ばれる) という。

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [x, y] := {}^t x J y \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

とおくと、 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; [x, x] > 0, x_1 > 0\}$ と書ける。

$$O(1, n-1) := \{g \in GL(n, \mathbb{R}) ; [gx, gy] = [x, y] (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\}$$

を考える。明らかに、 $O(1, n-1) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) ; {}^t g J g = J\}$ である。

補題 3.4. ${}^t g J g = J \iff g J {}^t g = J$.

証明. $J^2 = I$ より、 ${}^t g J g = J \implies {}^t g J g J = I$ 。ゆえに、 ${}^t g J = (g J)^{-1}$ 。よつて、 $g J {}^t g = I$ 、両辺に右から J をかけて、 $g J {}^t g = J$ 。逆向きも同様。□

$O(1, n-1)$ は連結成分を 4 個持つ²¹. 単位元の連結成分を $SO_0(1, n-1)$ とすると (再び上述の書物を参照)

$$SO_0(1, n-1) = \{g \in O(1, n-1); \det g = 1, g_{11} \geq 1\}.$$

補題 3.5. $SO_0(1, n-1) \subset G(\Omega)$.

証明. $g \in SO_0(1, n-1)$ とする. 補題 3.4 より, $gJ^t g = J$ である. 両辺の $(1, 1)$ 成分を比べると $g_{11}^2 - \sum_{k=2}^n g_{1k}^2 = 1$. さて $x \in \Omega$ とする. gx の第 1 成分 $(gx)_1$ は

$$(gx)_1 = \sum_{k=1}^n g_{1k} x_k = g_{11} x_1 + \sum_{k=2}^n g_{1k} x_k$$

であるが, Schwarz の不等式から

$$\left| \sum_{k=2}^n g_{1k} x_k \right| \leq \left(\sum_{k=2}^n g_{1k}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=2}^n x_k^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{g_{11}^2 - 1} \cdot x_1 < g_{11} x_1$$

がわかるので, $(gx)_1 > 0$ である. ゆえに $g(\Omega) \subset \Omega$. そして g^{-1} を考えれば, $g(\Omega) = \Omega$ を得るので, $g \in G(\Omega)$ である. \square

$G := \mathbb{R}_{>0} \times SO_0(1, n-1)$ (直積群) とおく. ただし, $\mathbb{R}_{>0}$ は正数倍という演算で Ω に働くものとする. 明らかに $G \subset G(\Omega)$. 次の行列 u, h_t は, いずれも $SO_0(1, n-1)$ に属することが容易にわかる:

$$u := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{u} \end{pmatrix} \quad (\text{ただし, } \tilde{u} \in SO(n-1, \mathbb{R})),$$

$$h_t := \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & I_{n-2} & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix} \quad (\text{ただし, } t \in \mathbb{R}).$$

(1) G は Ω に推移的に働く. 特に Ω は等質である.

証明. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \Omega$ を考えて, 任意に $x \in \Omega$ が与えられたとき, $g \in G$ を見

つけて, $x = ge_1$ とできればよい. まず, $[x, x] > 0$ であるから, $\lambda := \sqrt{[x, x]}$ とおいて, $y := \lambda^{-1}x$ とおくと $[y, y] = 1$ となる. 次に, $r := \sqrt{y_2^2 + \cdots + y_n^2}$ とおくと,

²¹たとえば, 山内恭彦・杉浦光夫共著, 連続群論入門, 培風館 (新数学シリーズ) や, 平井武著, 線型代数と群の表現 II, 朝倉書店 (すうがくぶっくす) の 15 章参照.

$\tilde{u} \in SO(n-1, \mathbb{R})$ を見つけてきて,

$$\tilde{u} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

とできる. $y_1^2 - r^2 = [y, y] = 1$ と $y_1 > 0$ より, 適当な $t \geq 0$ を用いて, $y_1 = \cosh t$, $r = \sinh t$ とできる. このとき, $x = \lambda u h_t e_1$ となっている. \square

(2) \mathbb{R}^n の標準内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ で $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$ とみなすとき,

$$\Omega^* = \{y \in \mathbb{R}^n; \langle y | x \rangle > 0 \text{ for } \forall x \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}\}$$

となるが, 実は $\Omega^* = \Omega$, すなわち Ω は自己双対である (証明は演習としよう). 以上より, Lorentz 錐は等質で自己双対な開凸錐²²であることがわかった.

例 3.6. 正定値実対称行列のなす開凸錐

$V := \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ とし, $\Omega := \{x \in V; x \gg 0\}$ とする. すなわち, Ω は正定値実対称行列のなす開凸錐とする. 各 $g \in GL(r, \mathbb{R})$ に対して, $\rho(g)x = gx^t g$ ($x \in V$) とおく. 明らかに $\rho(g) \in G(\Omega)$ である.

(1) Ω は等質である.

証明. 任意の $x \in \Omega$ が, 適当な $g \in GL(r, \mathbb{R})$ を用いて, $x = g^t g = \rho(g)I_r$ (I_r は r 次単位行列) と書ければよい²³. 2次形式

$$Q_x[\xi] := \sum_{i,j=1}^r x_{ij} \xi_i \xi_j = \langle x\xi | \xi \rangle_{\mathbb{R}^r} \quad (\xi \in \mathbb{R}^r)$$

を考える. これを ξ_1 の2次式と見て書き直すと

$$Q_x[\xi] = x_{11}\xi_1^2 + 2 \sum_{j=1}^r x_{1j}\xi_j \xi_1 + Q'[\xi'].$$

ただし $Q'[\xi']$ は $\xi' := {}^t(\xi_2, \dots, \xi_r) \in \mathbb{R}^{r-1}$ の2次形式. $e_1 := {}^t(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^r$ とすると, $e_1 \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}$ であるから, 補題 2.4 より $x_{11} = \langle x e_1 | e_1 \rangle_{\mathbb{R}^r} > 0$ である. ξ_1 について平方完成をすると, ξ' の2次形式 $Q'_1[\xi]$ があつて,

$$(3.1) \quad Q_x[\xi] = \left(\sqrt{x_{11}}\xi_1 + \sum_{j=2}^r \frac{x_{1j}}{\sqrt{x_{11}}}\xi_j \right)^2 + Q'_1[\xi'].$$

²²このような開凸錐を対称錐と呼ぶ

²³もちろん, $g = x^{1/2}$ と取るのが一番早いですが, ここでは別の方法で示す.

$\xi' \in \mathbb{R}^{r-1} \setminus \{0\}$ が与えられたとき, $\xi_1 \in \mathbb{R}$ をうまくとれば²⁴, $Q'_1[\xi'] = Q_x[\xi]$ とできるから, $Q'_1[\xi']$ は \mathbb{R}^{r-1} 上の正定値な 2 次形式になる. $Q'_1[\xi']$ の行列を y とすると, すなわち $Q'_1[\xi'] = \langle y\xi' | \xi' \rangle_{\mathbb{R}^{r-1}}$ とすると, (3.1) より

$$\begin{aligned} Q_x[\xi] &= \left\langle \left(\begin{array}{c} \sqrt{x_{11}}\xi_1 + \sum_{j=2}^r \frac{x_{1j}}{\sqrt{x_{11}}}\xi_j \\ y\xi' \end{array} \right) \middle| \left(\begin{array}{c} \sqrt{x_{11}}\xi_1 + \sum_{j=2}^r \frac{x_{1j}}{\sqrt{x_{11}}}\xi_j \\ \xi' \end{array} \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^r} \\ &= \left\langle \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & y \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} \alpha & {}^t\beta \\ 0 & I_{r-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi' \end{array} \right) \middle| \left(\begin{array}{cc} \alpha & {}^t\beta \\ 0 & I_{r-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi' \end{array} \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^r} \end{aligned}$$

となる. ただし, $\alpha := \sqrt{x_{11}}$, $\beta_j := \frac{x_{1j}}{\sqrt{x_{11}}}$ ($j = 2, \dots, n$), $\beta = {}^t(\beta_2, \dots, \beta_r)$. これは x が次のように書かれることを意味する:

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & I_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & {}^t\beta \\ 0 & I_{r-1} \end{pmatrix}.$$

r に関する帰納法で, 下三角行列 $T \in GL(r, \mathbb{R})$ を見つけてこれて, $x = T {}^t T = \rho(T) I_r$ となることがわかる. \square

(2) V に内積 $\langle x | y \rangle := \text{tr}(xy)$ を入れることで $V^* = V$ と見なすとき, $\Omega^* = \Omega$ である. すなわち, $\Omega^* = \{y \in V; \text{tr}(xy) > 0 \text{ (for } \forall x \in \bar{\Omega} \setminus \{0\})\}$ とするとき, $\Omega^* = \Omega$ となる (演習). 従って Ω は自己双対である. 以上より Ω は対称錐であることがわかった.

例 3.7. 等質ではない正則開凸錐の例²⁵.

以下 \mathbb{R}^3 で考える. 以下では, \mathbb{R}^3 の元 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ に対して

$$\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle_+ := \left\{ \sum_{j=1}^n t_j \mathbf{a}_j; t_j > 0 \text{ (} \forall j = 1, \dots, n) \right\}$$

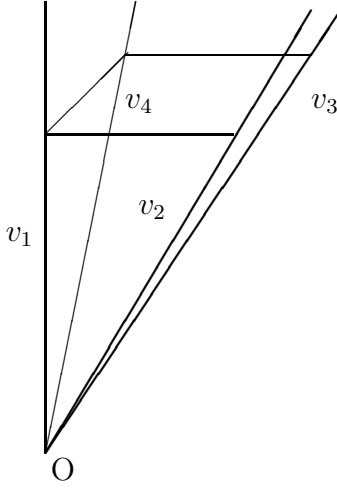
とおく. さて次の 4 元 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をとって, 開凸錐 $\Omega := \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle_+$ を考える.

²⁴もちろん, 式 (3.1) で $(\dots)^2 = 0$ となるようにとる

²⁵H. Ishi The gradient maps associated to certain non-homogeneous cones, Proc. Japan Acad., 81 (2005), 44–46 より採った.



$\mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2$: 平面 $y = 0$

$\mathbb{R}v_2 + \mathbb{R}v_3$: 平面 $x = z$

$\mathbb{R}v_3 + \mathbb{R}v_4$: 平面 $y = z$

$\mathbb{R}v_4 + \mathbb{R}v_1$: 平面 $x = 0$

$$\text{ゆえに } \Omega = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x > 0, \quad y > 0 \\ z - x > 0, \quad z - y > 0 \end{array} \right\}.$$

\mathbb{R}^3 の標準内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する Ω の双対凸錐 Ω^* は,

$$\boldsymbol{\lambda}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくとき, 上より容易に

$$\Omega^* = \langle \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3, \boldsymbol{\lambda}_4 \rangle_+ = \left\{ \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} \zeta > 0, \quad \xi + \zeta > 0 \\ \xi + \eta + \zeta > 0, \quad \eta + \zeta > 0 \end{array} \right\}$$

で与えられることがわかる. 実際,

$$\langle \boldsymbol{\lambda}_1 | \mathbf{x} \rangle = x, \quad \langle \boldsymbol{\lambda}_2 | \mathbf{x} \rangle = y, \quad \langle \boldsymbol{\lambda}_3 | \mathbf{x} \rangle = -x + z, \quad \langle \boldsymbol{\lambda}_4 | \mathbf{x} \rangle = -y + z$$

であり,

$$\langle \boldsymbol{\lambda} | \mathbf{v}_1 \rangle = \zeta, \quad \langle \boldsymbol{\lambda} | \mathbf{v}_2 \rangle = \xi + \zeta, \quad \langle \boldsymbol{\lambda} | \mathbf{v}_3 \rangle = \xi + \eta + \zeta, \quad \langle \boldsymbol{\lambda} | \mathbf{v}_4 \rangle = \eta + \zeta$$

となっていることに注意すればよい.

さて, $\bar{\Omega}$ の extremal な母線²⁶は, $l_{v_1} \cup l_{v_2} \cup l_{v_3} \cup l_{v_4}$ で, $G(\Omega)$ の作用でこの和集合は不変である. 従ってまた, $G(\Omega)$ は Ω の部分集合 $L := \langle v_1, v_3 \rangle_+ \cap \langle v_2, v_4 \rangle_+$ を不変にする. 言い換えると, L 上の点は $G(\Omega)$ の元によって $\Omega \setminus L$ に写されることはない. つまり, $G(\Omega)$ は Ω に推移的には働いてない.

²⁶ C を閉凸錐とする. 各 $x \in \partial C \setminus \{0\}$ に対して, 半直線 $l_x := \{\lambda x; \lambda > 0\}$ のことを, x を通る C の母線と呼ぶ. x を通る C の母線が **extremal** であるとは, $u \in l_x$ が $u = v + w$ ($v, w \in C$) と表されるならば, $v, w \in l_x$ となるときをいう.

§4. 自己双対でない等質開凸錐

V を実ノルム空間, $\Omega \subset V$ を開凸錐とする.

定義. Ω が可約であるとは, V が自明ではない部分空間の直和 $V = V_1 \oplus V_2$ に分解され, V_1, V_2 の開凸錐 Ω_1, Ω_2 があって, $\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$ となること. そうでないとき, Ω は既約であるという.

定義. V_1, V_2 をノルム空間とし, $\Omega_j \subset V_j$ ($j = 1, 2$) を開凸錐とする. Ω_1 が Ω_2 に線型同型であるとは, 線型同型写像 $T: V_1 \rightarrow V_2$ があって, $T(\Omega_1) = \Omega_2$ となること.

• 互いに線型同型でない 10次元以下の既約等質開凸錐は有限個である. 分類もされている (金行一辻, 1974). 11次元以上では, 各次元で連続無限個の互いに線型同型ではない既約開凸錐がある.

例 4.1. 自己双対でない等質開凸錐, すなわち, どのように内積を定義しても, その内積に関して自己双対にならない等質開凸錐の例 (1960年に Vinberg が挙げた開凸錐). 次元は5で, そのようなもので最低次元のものである.

$$V := \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_4 \\ v_2 & v_3 & 0 \\ v_4 & 0 & v_5 \end{pmatrix} ; v_i \in \mathbb{R} (i = 1, \dots, 5) \right\} \cong \mathbb{R}^5$$

とする. $V \subset \text{Sym}(3, \mathbb{R})$ に注意して, V には $\text{Sym}(3, \mathbb{R})$ からの内積を入れてノルム空間にする:

$$\langle v | v' \rangle := \text{tr}(vv') \quad (v, v' \in V), \quad \|v\| := \sqrt{\langle v | v \rangle}.$$

考える開凸錐は

$$\Omega := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 \end{pmatrix} ; x_1 > 0, x_1x_3 - x_2^2 > 0, x_1x_5 - x_4^2 > 0 \right\}.$$

この Ω を **Vinberg 錐** と呼ぶ. この開凸錐が自己双対ではないことは, 今となってはいろいろな判定条件で確かめることができる. ここでは Ω の等質性と Ω^* の記述にとどめることにする.

(1) Ω は等質である.

実際, $x \in V$ に対して, $x^{(1)} := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} := \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_4 & x_5 \end{pmatrix}$ とおき, $i = 1, 2$ に対して, $g_i := \begin{pmatrix} a & 0 \\ b_i & c_i \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$ とするとき, $g \in GL(V)$ を, $(gx)^{(i)} := g_i x^{(i)} g_i$

($i = 1, 2$) で定義する. 直接の計算で

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_4 & x_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

の (1,1) 成分はともに $a^2 x_1$ であることがわかるから, g は well-defined である. また

$$x \in \Omega \implies x^{(1)} \gg 0, x^{(2)} \gg 0 \implies (gx)^{(1)} \gg 0, (gx)^{(2)} \gg 0$$

より $g(\Omega) \subset \Omega$ がわかる. g^{-1} を考えることで逆向きの包含関係もわかるから, 結局 $g \in G(\Omega)$ である. 推移性については, $x \in \Omega$ が与えられたとき, 上で定義した形の $g \in GL(\Omega)$ で, $gI_3 = x$ となるものがあればよい. それには

$$x^{(i)} = g_i I_2 {}^t g_i = g_i {}^t g_i = \begin{pmatrix} a^2 & ab_i \\ ab_i & b_i^2 + c_i^2 \end{pmatrix}$$

が a, b_i, c_i で解ければよい. そしてそれは実際に解ける.

(2) $\Omega^* := \{y \in V; \langle y | x \rangle > 0 (\forall x \in \bar{\Omega} \setminus \{0\})\}$ とおくとき

$$\Omega^* = \{y \in V; y \gg 0\}$$

となることを示そう. 以下, 補助的に次の集合 C_0 を考える:

$$(4.1) \quad C_0 := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & 0 \\ \alpha\gamma & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

明らかに $C_0 \subset \bar{\Omega}$ である.

(あ) $\Gamma := \{y \in V; y \gg 0\}$ とおく. まず, $\Omega^* \subset \bar{\Gamma}$ (ゆえに $\Omega^* \subset \Gamma$) を示そう.

$y \in \Omega^*$ とすると, 任意の $z \in C_0$ にたいして $\text{tr}(yz) \geq 0$ である. z を C_0 の定義 (4.1) にある行列で表して直接計算をすると:

$$\begin{aligned} 0 \leq \text{tr}(yz) &= \alpha^2 y_1 + 2\alpha\beta y_2 + \beta^2 y_3 + 2\alpha\gamma y_4 + \gamma^2 y_5 \\ &= (\alpha \ \beta \ \gamma) \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ y_2 & y_3 & 0 \\ y_4 & 0 & y_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ゆえに y は半正定値行列となって, $y \in \bar{\Gamma}$ である.

逆向きの包含関係を示すのに次の補題が必要である.

補題 4.2. $\bar{\Omega} = C_0 + C_0$.

証明. 「 \supset 」は明らかなので, 「 \subset 」を示そう. すなわち, $x \in \bar{\Omega}$ が与えられたとき, $x = z_1 + z_2$ となる $z_j \in C_0$ ($j = 1, 2$) が求まればよいが, これは次の連立方程式が

解けるかどうかということである：

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2, & x_2 &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2, & x_3 &= \beta_1^2 + \beta_2^2, \\ x_4 &= \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2, & x_5 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \end{aligned}$$

「 $x \in \bar{\Omega} \iff x^{(i)}$ は半正定値 ($i = 1, 2$)」なので、 $x_1 = 0$ のときは、 $x_2 = x_4 = 0$ であることに注意。この場合は容易なので、 $x_1 \neq 0$ のときを扱えばよく、そのときは $\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{x_1/2}$ と取れる。そうすると $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ の存在は初等的に示せる。□

(い) $\Gamma \subset \Omega^*$ を示そう。

実際 $y \in \Gamma$ とする。任意の $x \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}$ を補題 4.2 によって $x = z + z'$ ($z, z' \in C_0$) と表すとき、 $\text{tr}(yx) = \text{tr}(yz) + \text{tr}(yz')$ であるが、(あ) での計算と同様に、 z を (4.1) の C_0 の定義中の行列で表すと

$$\text{tr}(yz) = (\alpha \quad \beta \quad \gamma) \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ y_2 & y_3 & 0 \\ y_4 & 0 & y_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

$y \in \Gamma$ であるから、この右辺は ≥ 0 で、等号成立は $\alpha = \beta = \gamma = 0$ 、すなわち、 $z = 0$ のときに限る。ゆえに $\text{tr}(yz) \geq 0$ 。同様に $\text{tr}(yz') \geq 0$ であり、 $x \neq 0$ より、 $z = z' = 0$ とはならないので、 $\text{tr}(yx) > 0$ 。ゆえに $y \in \Omega^*$ 。

例 4.3. 自己双対ではないが、双対凸錐に線型同型な既約等質開凸錐の例。

次で表される 7 次元の実ベクトル空間 V を考える：

$$V := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & x' & \xi_1 \\ 0 & x_1 & 0 & \xi_2 \\ x' & 0 & X & x'' \\ \xi_1 & \xi_2 & x'' & x_2 \end{pmatrix}; \begin{array}{l} x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathbb{R} \\ \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, \quad x', x'' \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \cong \mathbb{R}^7.$$

$V \subset \text{Sym}(4, \mathbb{R})$ であることに注意して、 $\Omega := \{x \in V; x \gg 0\}$ とおく。ここで V の内積を次のように定義する。

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & x' & \xi_1 \\ 0 & x_1 & 0 & \xi_2 \\ x' & 0 & X & x'' \\ \xi_1 & \xi_2 & x'' & x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & y' & \eta_1 \\ 0 & y_1 & 0 & \eta_2 \\ y' & 0 & Y & y'' \\ \eta_1 & \eta_2 & y'' & y_2 \end{pmatrix} \in V \text{ に対して,}$$

$$(4.2) \quad \langle x | y \rangle := x_1y_1 + XY + x_2y_2 + 2(x'y' + x''y'' + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2).$$

(1) Ω は等質である。

$GL(4, \mathbb{R})$ の次の部分群 \mathbf{H} を考える :

$$(4.3) \quad \mathbf{H} := \left\{ h := \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 \\ h' & 0 & H & 0 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & h'' & h_2 \end{pmatrix} ; h_1, h_2 > 0, \quad H > 0, \right. \\ \left. h', h'' \in \mathbb{R}, \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(実際に部分群をなすことは各自で確かめてほしい). \mathbf{H} は Ω に $\mathbf{H} \times \Omega \ni (h, x) \mapsto hx^th$ により作用している. 実際この作用は単純推移的である (固定部分群が trivial).

(2) 内積 (4.2) に関して双対凸錐 Ω^* を考える :

$$\Omega^* := \{y \in V ; \langle y | x \rangle > 0 \quad (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})\}.$$

V 上の線型同型写像 T_0 が存在して, $T_0(\Omega) = \Omega^*$ となることを示そう. 次式で V 上の線形写像 T_0 を定義する :

$$T_0x = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & x'' & \xi_1 \\ 0 & x_2 & 0 & \xi_2 \\ x'' & 0 & X & x' \\ \xi_1 & \xi_2 & x' & x_1 \end{pmatrix} \quad (x \in V).$$

T_0 が等長写像である (任意の $x, y \in V$ に対して, $\langle T_0x | T_0y \rangle = \langle x | y \rangle$ をみたとす) こと, 及び $T_0^2 = \text{Id}_V$ であることは明らかであろう.

定理 4.4. $\Omega^* = T_0(\Omega)$.

証明には次の補題を使う. 元 $h \in \mathbf{H}$ を (4.3) にあるように表示しておいて,

$$\check{h} := \begin{pmatrix} h_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 \\ h'' & 0 & H & 0 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & h' & h_1 \end{pmatrix} \in \mathbf{h}$$

とおく. このとき, $h \mapsto \check{h}$ は \mathbf{H} の involutive anti-automorphism である :

$$\check{\check{h}} = h, \quad (h\check{h}') = \check{h}'\check{h}.$$

次に

$$\rho(h)x := hx^th \quad (h \in \mathbf{H}, x \in V), \quad \sigma(h) := T_0\rho(h)T_0 \quad (h \in \mathbf{H}).$$

とおく. 明らかに ρ, σ は \mathbf{H} の表現である. 次の補題が成立する.

補題 4.5. $\langle \rho(h)x | y \rangle = \langle x | \sigma(\check{h})y \rangle \quad (x, y \in V, h \in \mathbf{H})$.

証明. T_0 の性質から, 証明すべき式は, $\langle \rho(h)x | y \rangle = \langle T_0x | \rho(\check{h})T_0y \rangle$ となる. 一般の $h \in \mathbf{H}$ が次のように分解されることから, 一つ一つのピースで計算すればよい: まず

$$\begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 \\ h' & 0 & H & 0 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & h'' & h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 \\ h' & 0 & 1 & 0 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & h'' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 \end{pmatrix}$$

と分解し, さらに

$$\begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 \\ h' & 0 & 1 & 0 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ h' & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & h'' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h'' & 1 \end{pmatrix}$$

と分解する. 詳細は省略. □

この補題は, $\sigma(\check{h}) = \rho(h)^*$ を意味する.

定理 4.4 の証明. 任意の $x \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}$ は半正定値なので, I_4 を 4 次の単位行列とすると

$$\langle I_4 | x \rangle = x_1 + X + x_2 > 0.$$

これは $I_4 \in \Omega^*$ を意味する. $\Omega^* = \rho(\mathbf{H})^* I_4$ であるから, 補題 4.5 より, $\Omega^* = \sigma(\mathbf{H}) I_4$.
そして定義より

$$\sigma(\mathbf{H}) I_4 = T_0 \rho(\mathbf{H}) T_0(I_4) = T_0 \rho(\mathbf{H})(I_4) = T_0(\Omega).$$

ゆえに $\Omega^* = T_0(\Omega)$ である. □

§5. 等質開凸錐とクラン

V を有限次元実ノルム空間とし, $\Omega \subset V$ を等質な正則開凸錐とする.

命題 5.1 (Vinberg). $G(\Omega)$ の同時三角化可能な部分群 H で, Ω に単純推移的に作用するものが存在する. ここで, 同時三角化可能であるとは, V に適当な基底をとると, H の元はすべて下三角行列 (上三角でもよい) で表されることをいう.

例 5.2. 例 3.6 を再び取り上げる. $V := \text{Sym}(r, \mathbb{R})$, $\Omega := \{x \in V; x \gg 0\}$ とする. 各 $g \in GL(r, \mathbb{R})$ に対して

$$\rho(g)x := gx^t g \quad (x \in V)$$

とおくと, ρ は $GL(r, \mathbb{R})$ から $G(\Omega)$ の中への準同型で, $\rho(GL(r, \mathbb{R}))$ は Ω に推移的に働く. 対角成分がすべて正であるような下三角行列からなる $GL(r, \mathbb{R})$ の部分群を H_0 とする:

$$H_0 := \left\{ h = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & * & \ddots & \\ & & & a_r \end{pmatrix} \mid a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_r > 0 \right\}.$$

このとき, 例 3.6 より, $\rho(H_0)$ は Ω に単純推移的に働いている. 実際, $x \in \Omega$ が与えられたとき, $\rho(h)I_r = x$ となる $h \in H_0$ が一意的に定まる.

演習: $\Delta_1(x) = x_{11}, \dots, \Delta_r(x) = \det x$ を $x \in V$ の首座小行列式とする. $x \in \Omega$ に対して, $\rho(h)I_r = x$ により一意的に定まる $h \in H_0$ の対角成分 a_1, \dots, a_r は, $a_j = \sqrt{\frac{\Delta_j(x)}{\Delta_{j-1}(x)}}$ ($j = 1, \dots, r$) で与えられる. ただし $\Delta_0(x) = 1$ ($\forall x \in V$) とする.

さて (i, j) 成分のみが 1 でその他の成分がすべて 0 であるような行列 (行列単位) を E_{ij} で表し,

$$f_{ii} := E_{ii} \quad (i = 1, \dots, r), \quad f_{ij} := E_{ij} + E_{ji} \quad (1 \leq i < j \leq r)$$

とおく. 明らかに $\{f_{ij}; 1 \leq i \leq j \leq r\}$ はベクトル空間 V の基底をなしている. この基底に辞書式順序を入れる: すなわち,

$$(5.1) \quad f_{11}, \dots, f_{1r}, f_{22}, \dots, f_{2r}, \dots, f_{rr}$$

というように順序をつけるとき, その順序づけられた基底で V 上の線型写像 $\rho(h)$ ($h \in H_0$) は下三角行列で表される (詳細は演習). //

一般の状況に戻ろう. H を命題 5.1 にいう $G(\Omega)$ の部分群とする. $E \in \Omega$ を固定して, 軌道写像 $H \ni h \mapsto hE \in \Omega$ を考えると, これは微分同相である. H の Lie 代数を \mathfrak{h} とおく: $\mathfrak{h} := \text{Lie}(H)$. \mathfrak{h} は H の単位元における接空間とみなせる. そうすると, 軌道写像の H の単位元における微分 $\mathfrak{h} \ni T \mapsto TE \in V$ は線型同型写像である. その逆写像を

$$L: V \ni x \mapsto L_x \in \mathfrak{h}$$

とする. つまり, 各 $x \in V$ に対して, $L_x \in \mathfrak{h}$ は $L_x E = x$ をみたす一意的な \mathfrak{h} の元 (V 上の線型作用素) である.

定義. $x \Delta y := L_x y$ ($x, y \in V$) によって, V に積の構造 (結合法則は要求しない) を入れる.

$$(1) [L_x, L_y] = L_{x \Delta y - y \Delta x} \quad (x, y \in V).$$

$\therefore [L_x, L_y] \in \mathfrak{h}$ であって

$$[L_x, L_y]E = L_x y - L_y x = x \Delta y - y \Delta x. \quad //$$

一般にベクトル空間 V に積 Δ を定義して, その積による左かけ算作用素が (1) をみたすとき, (V, Δ) のことを左対称代数と呼ぶ. この用語の妥当性を見るために, 結合子 $[\cdot, \cdot, \cdot]$ を導入しよう:

$$[a, b, c] := a \Delta (b \Delta c) - (a \Delta b) \Delta c.$$

そうすると, (1) は $[x, y, z] = [y, x, z]$ と同値. すなわち, 3重線型作用素である結合子が, 左側の2変数について, 対称であることを (1) は意味する.

\therefore 定義によって

$$[x, y, z] = x \Delta (y \Delta z) - (x \Delta y) \Delta z,$$

$$[y, x, z] = y \Delta (x \Delta z) - (y \Delta x) \Delta z.$$

したがって

$$[x, y, z] = [y, x, z] \iff x \Delta (y \Delta z) - y \Delta (x \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z - (y \Delta x) \Delta z$$

$$\iff [L_x, L_y]z = L_{x \Delta y - y \Delta x} z. \quad //$$

(2) 双線型写像 $(x, y) \mapsto \text{tr } L_{x \Delta y}$ は V に内積を定める:

$$\begin{cases} \text{tr } L_{x \Delta y} = \text{tr } L_{y \Delta x} & (\text{by (1)}), \\ \text{tr } L_{x \Delta x} > 0 & (\text{if } x \neq 0). \end{cases}$$

(2) での正定値性の証明は自明ではない. ここでは省略する (Ω の特性関数を導入する必要がある).

定義. 一般に (V, Δ) を algebra とする (結合法則は仮定しない). (V, Δ) がクランであるとは, $L_x y := x \Delta y$ に対して, 次の (1)~(3) がみたされるときをいう:

$$(1) (V, \Delta) \text{ は左対称代数である: } [L_x, L_y] = L_{x \Delta y - y \Delta x} \quad (\forall x, y \in V).$$

- (2) $s \in V^*$ が存在して, 双線型形式 $(x, y) \mapsto \langle s, x \Delta y \rangle$ は V に内積を定める.
 (このような $s \in V^*$ は認容線型形式と呼ばれる.)
- (3) 各 $x \in V$ に対して, L_x の固有値は実数のみである.

命題 5.3. Ω を V の等質な正則開凸錐とし, 上述のように積 Δ を定義すると, (V, Δ) はクランになる.

証明. (1) と (2) は OK ($\langle s, x \rangle := \text{tr } L_x$).

(3) については, $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ が同時三角化可能であることより. □

命題 5.4. 命題 5.3 の V のクラン構造において, E は単位元である.

証明. $x \in V$ のとき, 定義より

$$x \Delta E = L_x E = x.$$

一方で, $E \Delta x = x$ の方は自明ではない. これは H を $G(\Omega)$ の極大分裂可解部分群として選んでいることから来る. 詳細は省略. □

例 5.5. 例 5.2 に戻ろう. $V = \text{Sym}(r, \mathbb{R})$, $\Omega := \{x \in V; x \gg 0\}$ である. $E \in \Omega$ を単位行列とする. 以下 V に入る, E を単位元とするクラン構造を見てみよう. $H = \rho(H_0)$ ととれていることに注意. H_0 の Lie 代数を \mathfrak{h}_0 とすると

$$\mathfrak{h}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & * & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}; a_i \in \mathbb{R} \ (\forall i) \right\}.$$

単位元 $E \in H$ における写像 $\rho: h \mapsto \rho(h)$ の微分も (面倒なので) 同じ記号 ρ で表すことにすると, $\rho(X)y = Xy + y^t X$ ($X \in \mathfrak{h}_0, y \in V$) となる. $\mathfrak{h} = \rho(\mathfrak{h}_0)$ は H の Lie 代数である. さて, 各 $x \in V$ に対して, $\underline{x} \in \mathfrak{h}_0$ を次で定義する:

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & & & & \\ x_{21} & \frac{1}{2}x_{22} & & & 0 \\ \vdots & x_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{r,r-1} & \frac{1}{2}x_{rr} \end{pmatrix}.$$

明らかに, $x = \underline{x} + {}^t(\underline{x})$. 言い換えれば $\rho(\underline{x})E = x$ であるから, $L_x = \rho(\underline{x})$. ゆえに

$$x \Delta y = \underline{x}y + y^t(\underline{x}) \quad (x, y \in V).$$

これが V のクラン構造の積であり、 E が単位元であることは直接読み取れる。最後に $\operatorname{tr} L_{x\Delta y}$ が実際に V に内積を定義している事を直接確かめておこう。

補題 5.6. (1) $L_{f_{ii}}$ ($i = 1, \dots, r$) は、基底 (5.1) に関して対角行列で表され、その固有値は $1, \frac{1}{2}, 0$ で、対応する固有空間はそれぞれ

$$\mathbb{R}f_{ii}, \quad \left(\bigoplus_{a<i} \mathbb{R}f_{ai}\right) \oplus \left(\bigoplus_{j>i} \mathbb{R}f_{ij}\right), \quad \bigoplus_{\substack{k<l \\ k \neq i, l \neq i}} \mathbb{R}f_{kl}.$$

(2) $L_{f_{ij}}$ ($i < j$) は基底 (5.1) に関して真に下三角行列 (対角成分は 0) で表される。

証明は演習とする。

さて、各 $x \in V$ を $x = \sum_{i \leq j} x_{ij} f_{ij}$ とあらわすとき、この補題により

$$\operatorname{tr} L_{f_{ii}} = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n+1}{2} \quad (i = 1, \dots, r), \quad \operatorname{tr} L_{f_{ij}} = 0 \quad (i < j)$$

であるから

$$\operatorname{tr} L_x = \sum_{i=1}^r x_{ii} \operatorname{tr} L_{f_{ii}} = \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^r x_{ii} = \frac{n+1}{2} \operatorname{tr} x.$$

ゆえに

$$\operatorname{tr} L_{x\Delta y} = \frac{n+1}{2} \operatorname{tr}(x\Delta y) = \frac{n+1}{2} \operatorname{tr}(\underline{x}y + y^t(\underline{x})) = \frac{n+1}{2} (\operatorname{tr}(\underline{x}y) + \operatorname{tr}(^t(\underline{x})y)).$$

ここで、 $\underline{x} + ^t(\underline{x}) = x$ であるから、 $\operatorname{tr} L_{x\Delta y} = \frac{n+1}{2} \operatorname{tr}(xy)$ を得る。ゆえに $\operatorname{tr} L_{x\Delta y}$ は V に内積を定めている。

注意：例 5.5 において、 $R_y x = x\Delta y$ とおく。このとき

$$\det R_y = \Delta_1(y) \cdots \Delta_r(y).$$

逆に (V, Δ) を単位元 E を持つクランとし $\mathfrak{h} := \{L_x; x \in V\}$ とおく。クランの条件 (1) より、 \mathfrak{h} は Lie 代数をなし、条件 (3) より実数体上同時三角化可能である (適当なサイズの実下三角行列のなす Lie 代数の部分 Lie 代数になっている)。 $\exp \mathfrak{h}$ で生成される $GL(V)$ の部分 Lie 群を H とすると、 \mathfrak{h} が同時三角化可能ということから、指数写像 $\exp : \mathfrak{h} \rightarrow H$ は微分同相になる。そして $\Omega := H \cdot E$ (E を通る H 軌道) とおくと、 Ω は等質な正則開凸錐になる。

§6. 等質 Siegel 領域

以下 V は内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を持つ実ベクトル空間とし, Ω は V に含まれる正則な開凸錐とする. $W := V_{\mathbb{C}}$ (V の複素化) とおく. W には V の内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を拡張したエルミート内積 $(\cdot | \cdot)$ を入れておく.

定義. W の領域 $T_{\Omega} := V + i\Omega$ を **tube domain** (over Ω) あるいは, 第 1 種の **Siegel 領域** と呼ぶ.

実型 V に関する W の conjugation を $w \mapsto w^*$ とする: $(v_1 + iv_2)^* := v_1 - iv_2$ ($v_1, v_2 \in V$). U を複素ベクトル空間とし, $Q : U \times U \rightarrow W$ は, sesqui-linear で Hermitian であるとする. すなわち, $Q(u, u')$ は, 第 1 変数 u に関して複素線型, 第 2 変数 u' に関して複素反線型であり

$$Q(u', u) = Q(u, u')^* \quad (u, u' \in U)$$

が成り立っている. さらに Q は Ω -positive であるとする:

$$Q(u, u) \in \overline{\Omega} \quad (\Omega \text{ の閉包}), \quad \text{かつ} \quad Q(u, u) = 0 \iff u = 0.$$

$V = \mathbb{R}$ で, $\Omega = \mathbb{R}_{>0}$ のときは, Ω -positive であることは, 正定値であるということに他ならない.

定義. $D = D(\Omega, Q) := \{(u, w) \in U \times W ; \text{Im } w - Q(u, u) \in \Omega\}$ とおいて, この領域 D を **Siegel 領域** と呼ぶ. この場合, $U = \{0\}$ となる場合を排除しない. このときは, $D = V + i\Omega$ となり第 1 種の Siegel 領域である. $U \neq \{0\}$ の場合, D を第 2 種の **Siegel 領域** と呼ぶ.

例 6.1. $V := \text{Herm}(p, \mathbb{C})$ とし, 内積は $\langle x | y \rangle := \text{tr}(xy^*) = \text{tr}(xy)$ とする. そして $\Omega := \{x \in V ; x \gg 0\}$ とする. このとき, $W := V_{\mathbb{C}}$ とすると, $W = \text{Mat}(p, \mathbb{C})$ である. 実際, 任意の $p \times p$ 複素行列 w を $w = \frac{1}{2}(w + w^*) + i \cdot \frac{1}{2i}(w - w^*)$ と表せば, $\frac{1}{2}(w + w^*) \in \text{Herm}(p, \mathbb{C})$ かつ $\frac{1}{2i}(w - w^*) \in \text{Herm}(p, \mathbb{C})$ であるから. そして

$$U := \text{Mat}(p \times q, \mathbb{C}), \quad Q(u, u') := u(u')^* \quad (u, u' \in U)$$

とおくと, Q は Hermitian sesqui-linear で, $Q(u, u) = uu^* \in \overline{\Omega}$ であり, 「 $Q(u, u) = 0 \iff u = 0$ 」である. 実際, 任意の $\xi \in \mathbb{C}^n$ に対して, $((uu^*)\xi | \xi)_{\mathbb{C}^p} = \|u^*\xi\|_{\mathbb{C}^q}^2 \geq 0$ であるから. これより Siegel 領域が定義される:

$$D = D(\Omega, Q) = \left\{ (u, w) \in U \times W = \text{Mat}(p \times (p+q), \mathbb{C}) ; \frac{w - w^*}{2i} - uu^* \gg 0 \right\}.$$

$p = 1$ のときに §1 の例 2 になる.

例 6.2. $V := \text{Sym}(2, \mathbb{R})$, $\Omega := \{x \in V; x \gg 0\}$ とする. V には $\text{tr}(xy)$ で内積を入れておく. $W := V_{\mathbb{C}} = \text{Sym}(2, \mathbb{C})$ である. また, $U = \mathbb{C}^2$ とする.

$$Q(u, u') := \begin{pmatrix} u_1 \bar{u}'_1 & \frac{1}{2}(u_1 \bar{u}'_2 + u_2 \bar{u}'_1) \\ \frac{1}{2}(u_1 \bar{u}'_2 + u_2 \bar{u}'_1) & u_2 \bar{u}'_2 \end{pmatrix} \in W \quad (u = (u_1, u_2), u' = (u'_1, u'_2) \in U)$$

とおくと, 明らかに Q は sesqui-linear で Hermitian である. さらに

$$Q(u, u) = \begin{pmatrix} |u_1|^2 & \text{Re } u_1 \bar{u}_2 \\ \text{Re } u_1 \bar{u}_2 & |u_2|^2 \end{pmatrix}$$

であり, (1, 1) 成分も (2, 2) 成分も非負, かつ

$$\det Q(u, u) = |u_1|^2 |u_2|^2 - (\text{Re } u_1 \bar{u}_2)^2 \geq 0$$

であるから, $Q(u, u) \in \bar{\Omega}$. そして, 「 $Q(u, u) = 0 \iff u = 0$ 」が成り立っているから, Q は Ω -positive である. 以上のデータから Siegel 領域 $D = D(\Omega, Q)$ が定義される. この D は 5 次元で, Piatetski-Shapiro が 1959 年に定義したもので, 対称領域でないものである.

例 6.3. Piatetski-Shapiro の定義した, 最低次元である 4 次元の非対称な Siegel 領域は, 例 6.3 と同じ V, Ω で, $U = \mathbb{C}$ ととり, $Q(u, u') := \begin{pmatrix} u \bar{u}' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするものである.

定理 6.4 (Piatetski-Shapiro). 任意の Siegel 領域は有界領域に正則同相である.

以下 D は複素 Euclid 空間 Z の Siegel 領域とする.

定義. (1) $\text{Hol}(D)$ で, D の正則同相のなす群を表す. D が有界領域に正則同相なので, $\text{Hol}(D)$ は有限次元の実 Lie 群であることが知られている.

(2) $\text{Hol}(D)$ が D に推移的に作用するとき, D は等質であるという.

(3) $\text{Aff}(Z)$ で, Z 上の可逆で holomorphic なアフィン変換 $g(T, c)$ 全体のなす群を表す. ただし

$$g(T, c) : z \mapsto Tz + c \quad (T \in GL(Z), c \in Z)$$

群演算は

$$g(T, c)g(T', c') = g(TT', c + Tc').$$

単位元は恒等写像である $g(I, 0)$ であり, $g(T, c)^{-1} = g(T^{-1}, -T^{-1}c)$.

(4) $\text{Aff}(D) := \{g \in \text{Aff}(Z); g(D) = D\}$: D のアフィン変換群.

以下, $\text{Aff}(D)$ の構造をもう少し詳しく見るための準備をする.

$$D = D(\Omega, Q) := \{(u, w) \in U \times W ; \text{Im } w - Q(u, u) \in \Omega\}$$

とする. U にもエルミート内積を入れておき, $Z := U \oplus W$ に, $U = W^\perp$ となるようにエルミート内積を入れておく.

定義. $A(D) := \{f ; f \text{ は } D \text{ 上正則かつ } \overline{D} \text{ で連続で, } \|z\| \rightarrow \infty \text{ のとき } f(z) \rightarrow 0\}$.

定義. D の Shilov 境界とは, 次の性質を持つ ∂D の閉部分集合 B の内最小のもののことである:

$$\forall f \in A(D) \text{ に対して, } \max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in B} |f(z)|.$$

例 6.5. $D = \mathbb{R} + i\mathbb{R}_{>0}$ (上半平面) のとき, D の Shilov 境界は \mathbb{R} である.

なぜなら, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ に対して, $f_{x_0}(z) := \frac{1}{z + i - x_0}$ ($z \in D$) を考えると

$$|f_{x_0}(x + iy)|^2 = \frac{1}{(x - x_0)^2 + (y + 1)^2} \leq 1 \quad (\text{for } \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \geq 0)$$

であり, 等号は $x = x_0, y = 0$ のときに限る. さらに明らかに $f_{x_0} \in A(D)$ である. $A(D)$ に属する関数で $x_0 \in \mathbb{R}$ でのみその絶対値が最大値をとる関数が存在するので, D の Shilov 境界は \mathbb{R} である.

命題 6.6. (1) $\overline{D} = \{(u, w) \in U \times W ; \text{Im } w - Q(u, u) \in \overline{\Omega}\}$.

(2) D の Shilov 境界は

$$\Sigma := \{(u, w) \in U \times W ; \text{Im } w = Q(u, u)\}.$$

定義. N_Q は次の集合に群演算を導入したものとする:

集合としては, $N_Q := \{n(a, b) ; a \in V, b \in U\}$ で, 群演算は

$$n(a, b)n(a', b') := n(a + a' + 2\text{Im } Q(b, b'), b + b').$$

単位元は $n(0, 0)$ で, $n(a, b)^{-1} = n(-a, -b)$. しかし, $U \neq \{0\}$ ならば N_Q は可換ではない. N_Q の中心 $Z(N_Q)$ は $\{n(a, 0) ; a \in V\}$ に等しい.

定義. N_Q の $Z = U \oplus W$ への作用を次で定義する:

$$n(a, b) \cdot (u, w) := (u + b, w + a + iQ(b, b) + 2iQ(u, b)).$$

実際 $n(a, b) \in N_Q$ は $\text{Aff}(U \oplus W)$ の元として,

$$T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 2iQ(\cdot, b) & I \end{pmatrix} \in GL(U \oplus W), \quad c = \begin{pmatrix} b \\ a + iQ(b, b) \end{pmatrix} \in U \oplus W$$

とおいた $g(T, c)$ として作用している.

補題 6.7. (1) N_Q は Σ に単純推移的に働く.

(2) N_Q は D にも働く. 従って N_Q は \bar{D} に働く.

証明. $(u', w') = n(a, b) \cdot (u, w)$ とおく. 定義より

$$u' = u + b, \quad w' = w + a + iQ(b, b) + 2iQ(u, b).$$

従って

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \operatorname{Im} w' - Q(u', u') &= \operatorname{Im} w + Q(b, b) + 2 \operatorname{Re} Q(u, b) - Q(u + b, u + b) \\ &= \operatorname{Im} w - Q(u, u). \end{aligned}$$

よって, $(u, w) \in \Sigma$ ならば $(u', w') \in \Sigma$ であり, $(u, w) \in D$ ならば $(u', w') \in D$ である. さらに,

$$n(a, b) \cdot (0, 0) = (b, a + iQ(b, b))$$

であるから, N_Q の Σ への作用は推移的であり, 原点 $(0, 0)$ における固定部分群は単位元のみである. \square

注意 6.8. 実は, 補題 6.7 は命題 6.6 の証明のために必要である.

定義. $\operatorname{Aff}(\Sigma) := \{g \in \operatorname{Aff}(Z) ; g(\Sigma) = \Sigma\}$.

補題 6.7 とその直前の注意より, $N_Q \subset \operatorname{Aff}(\Sigma)$ とみなせる.

定義. $H_Q := \left\{ h_{A,B} := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in GL(U \oplus W) ; \begin{array}{l} B \in GL(U), A \in GL(V) \\ A(Q(u, u)) = Q(Bu, Bu) (\forall u \in U) \end{array} \right\}$.

$GL(V)$ は自然に $GL(W)$ の閉部分群と見なせるから, H_Q は $GL(U \oplus W)$ の閉部分群になっている.

定義. 準同型 (表現) ρ を次式で定義する:

$$\rho : H_Q \ni h_{A,B} \mapsto A \in GL(V).$$

補題 6.9. $\operatorname{Ker}(\rho)$ はコンパクトである.

証明. $\Omega^* \neq \emptyset$ であるから, $E \in \Omega^*$ をとると, $(u|u')_E := \langle Q(u, u') | E \rangle$ は U にエルミート内積を定める. さて, $h_{A,B} \in \operatorname{Ker}(\rho)$ ならば, $A = I$ ゆえ, $B \in GL(U)$ は, $Q(u, u) = Q(Bu, Bu) (\forall u \in U)$ をみたす. 従って, B は内積 $(\cdot|\cdot)_E$ に関するユニタリ群に属する. ゆえに, $\operatorname{Ker}(\rho)$ は有界である. 閉集合であることは明らか. \square

命題 6.10. $H_Q \subset \text{Aff}(\Sigma)$.

証明. $h = h_{A,B} \in H_Q$ とする. 任意の $(u, w) \in \Sigma$ に対して, $h_{A,B} \cdot (u, w) = (Bu, Aw) \in \Sigma$ を示そう. 実際, $A \in GL(V)$ より, $\text{Im}(Aw) = A(\text{Im } w)$ であるから

$$\text{Im}(Aw) - Q(Bu, Bu) = A(\text{Im } w - Q(u, u)) = 0.$$

ゆえに $h(\Sigma) \subset \Sigma$. h^{-1} を考えれば逆向きの包含関係が出る. \square

§7. Siegel 領域の affine 変換群

Siegel 領域 D は, $V \supset \Omega$ と $Q : U \times U \rightarrow W := V_{\mathbb{C}}$ により

$$D = D(\Omega, Q) := \{(u, w) \in U \times W ; \text{Im } w - Q(u, u) \in \Omega\} \subset U \oplus W =: Z$$

と書いているものとする. D の Shilov 境界を Σ とすると

$$\Sigma = \{(u, w) \in U \times W ; \text{Im } w = Q(u, u)\}.$$

実際には, $z_0 = (u_0, w_0) \in \Sigma$ が与えられたとき, z_0 でのみ $|f(z)|$ が最大値をとる $f \in A(D)$ が存在することが示せる. $T \in GL(Z)$ と $c \in Z$ に対して

$$g(T, c) : z \mapsto Tz + c \quad (z \in Z)$$

とおき, このような可逆な正則 Affine 変換の全体を $\text{Aff}(Z)$ と書く.

$$\text{Aff}(\Sigma) := \{g \in \text{Aff}(Z) ; g(\Sigma) = \Sigma\}.$$

$N_Q := \{n(a, b) ; a \in V, b \in U\}$ は次の演算で群をなしている :

$$n(a, b)n(a', b') := n(a + a' + 2\text{Im } Q(b, b'), b + b').$$

$N_Q \ni n(a, b)$, は次の T, c による $g(T, c)$ により, Σ 及び D に作用している (補題 6.7 参照) :

$$(7.1) \quad T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 2iQ(\cdot, b) & I \end{pmatrix} \in GL(U \oplus W), \quad c = \begin{pmatrix} b \\ a + iQ(b, b) \end{pmatrix} \in U \oplus W$$

N_Q の Σ へのこの作用は単純推移的である. 特に $\text{Aff}(\Sigma)$ は Σ に推移的に働いている. さらに Z 上の次の線型変換群 H_Q を考える :

$$H_Q := \left\{ h_{A,B} := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in GL(U \oplus W) ; \begin{matrix} B \in GL(U), A \in GL(V) \\ A(Q(u, u)) = Q(Bu, Bu) (\forall u \in U) \end{matrix} \right\}.$$

$H_Q \subset \text{Aff}(\Sigma)$ である (補題 6.10).

定理 7.1. (1) 原点 $0 \in \Sigma$ における $\text{Aff}(\Sigma)$ の固定部分群は H_Q に等しい :

$\text{Stab}_0 \text{Aff}(\Sigma) = H_Q$. 従って, Σ は $\text{Aff}(\Sigma)/H_Q$ に微分同相である.

(2) $\text{Aff}(\Sigma) = N_Q \rtimes H_Q$ ($\text{Aff}(\Sigma)$ は半直積で表され, N_Q が正規部分群).

証明. (1) H_Q の元が原点を動かさないことは明らか. $g \in \text{Aff}(\Sigma)$ が原点を固定したら, 明らかに g は線型であるから, $g = \begin{pmatrix} B & C \\ D & A \end{pmatrix}$ と書ける. ただし

$$B \in \mathcal{L}(U, U), \quad C \in \mathcal{L}(W, U), \quad D \in \mathcal{L}(U, W), \quad A \in \mathcal{L}(W, W).$$

任意の $y \in V$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して, $(0, ty) \in \Sigma$ ゆえ, $\Sigma \ni g \cdot (0, ty) = (tCy, tAy)$. ゆえに

$$t^2 Q(Cy, Cy) = \text{Im}(tAy) = t(\text{Im } A)y.$$

これがすべての $t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つので, $(\text{Im } A)y = 0$ かつ $Q(Cy, Cy) = 0$. これより, $A \in \mathcal{L}(V, V)$ かつ $C|_V = 0$. C は複素線型であるから, $C = 0$.

さらに, 任意の $u \in U$ と $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, $(e^{i\theta}u, iQ(u, u)) \in \Sigma$ であるから,

$$\Sigma \ni g \cdot (e^{i\theta}u, iQ(u, u)) = (e^{i\theta}Bu, e^{i\theta}Du + iA(Q(u, u))).$$

従って

$$\text{Im } e^{i\theta}Du + A(Q(u, u)) = Q(Bu, Bu).$$

ゆえに $\text{Im } e^{i\theta}Du$ は $\theta \in \mathbb{R}$ に無関係. これは $Du = 0$ ($\forall u \in U$) を意味し, 従って $A(Q(u, u)) = Q(Bu, Bu)$ も意味する. $C = 0$, $D = 0$ である以上, $B \in GL(U)$ かつ $A \in GL(V)$ である. $\text{Aff}(\Sigma)$ は Σ に推移的に働いているので, $\Sigma \approx \text{Aff}(\Sigma)/H_Q$ となる.

(2) $g \in \text{Aff}(\Sigma)$ をとると, N_Q の推移性から, $g \cdot 0 = n(a, b) \cdot 0$ ($a \in V, b \in U$). ゆえに $n(a, b)^{-1}g \in \text{Aff}(\Sigma)$ は原点を動かさないので, H_Q に属する. よって $g = nh$ ($n \in N_Q, h \in H_Q$) と書かれる. 明らかに $N_Q \cap H_Q = \{\text{恒等写像}\}$ であるから, この $g = nh$ という表示は一意的である. $N_Q \triangleleft \text{Aff}(\Sigma)$ を示すには, 任意の $n \in N_Q, h \in H_Q$ に対して, $hnh^{-1} \in N_Q$ さえ示せばよい. これは次式から従う (演習: $(u, w) \in U \times W$ への作用を見よ):

$$h_{A,B} n(a, b) h_{A,B}^{-1} = n(Aa, Bb) \quad (h_{A,B} \in H_Q).$$

以上で証明が終わる. □

系 7.2. $\text{Aff}(\Sigma)$ は

$$\left\{ g(A, B, a, b) ; \begin{array}{l} A \in GL(V), B \in GL(U), a \in V, b \in U, \\ A(Q(u, u)) = Q(Bu, Bu) (\forall u \in U) \end{array} \right\}$$

の全体に次式で積を入れたもののなす群と同一視できる：

$$g(A, B, a, b)g(A', B', a', b') := g(AA', BB', a + Aa' + 2 \text{Im } Q(b, Bb'), b + Bb').$$

単位元は $g(I, I, 0, 0)$ であり, $g(A, B, a, b)^{-1} = g(A^{-1}, B^{-1}, -A^{-1}a, -B^{-1}b)$ である.

証明. $g(A, B, a, b) := n(a, b)h_{A,B}$ とする. このとき

$$\begin{aligned} g(A, B, a, b)g(A', B', a', b') &= n(a, b)h_{A,B}n(a', b')h_{A',B'} \\ &= n(a, b)h_{A,B}n(a', b')h_{A,B}^{-1}h_{A,B}h_{A',B'} \\ &= n(a, b)n(Aa', Bb')h_{AA',BB'} \\ &= n(a + Aa' + 2 \text{Im } Q(b, Bb'), b + Bb')h_{AA',BB'} \\ &= g(AA', BB', a + Aa' + 2 \text{Im } Q(b, Bb'), b + Bb') \end{aligned}$$

となって証明終わり. □

定義. $\text{Aff}(D) := \{g \in \text{Aff}(U \times W) ; g(D) = D\}$.

補題 6.7 (2) と (7.1) より, $N_Q \subset \text{Aff}(D)$ と見ることができるところに注意.

補題 7.3. $\text{Aff}(D) \subset \text{Aff}(\Sigma)$.

証明. $g \in \text{Aff}(D)$ とすると, g は $U \times W$ の位相同型でもあるから, $g(\partial D) = \partial D$. さて, $z_0 = (u_0, w_0) \in \Sigma$ とすると, この節の最初に注意したように, z_0 でのみ $|f(z)|$ が \overline{D} での最大値をとる $f \in A(D)$ が存在する. $F(z) := f(g^{-1} \cdot z)$ を考えると, 明らかに $F \in A(D)$ であり, \overline{D} での $|F(z)|$ の最大値を $g \cdot (u_0, w_0)$ でのみとる. ゆえに $g \cdot (u_0, w_0) \in \Sigma$ となって, $g \in \text{Aff}(\Sigma)$ である. □

定理 7.4. (1) $\text{Stab}_0 \text{Aff}(D) = \{h_{A,B} \in H_Q ; A \in G(\Omega)\}$.

(2) $\text{Aff}(D) = \{g(A, B, a, b) \in \text{Aff}(\Sigma) ; A \in G(\Omega)\}$.

(3) $\text{Aff}(D) = N_Q \rtimes \text{Stab}_0 \text{Aff}(D)$.

(4) $E \in \Omega$ とすると, $\text{Stab}_{(0, iE)} \text{Aff}(D) \subset \text{Stab}_0 \text{Aff}(D)$.

証明. (1) 補題 7.3 から, $\text{Stab}_0 \text{Aff}(D) \subset \text{Stab}_0 \text{Aff}(\Sigma) = H_Q$ であるから, $h \in \text{Stab}_0 \text{Aff}(D)$ をとると, $h = h_{A,B}$ の形である. さて, 任意の $x \in \Omega$ に対して, $(0, ix) \in D$ であるから, $(0, iAx) = h \cdot (0, ix) \in D$. ゆえに $Ax \in \Omega$. これより $A(\Omega) \subset \Omega$ である.

あるが, h^{-1} を考えると, 逆の包含関係が出るので, $A(\Omega) = \Omega$. 逆に $h_{A,B} \in H_Q$ において $A(\Omega) = \Omega$ ならば, 任意の $(u, w) \in D$ に対して, $h_{A,B} \cdot (u, w) = (Bu, Aw)$ より

$$\text{Im } Aw - Q(Bu, Bu) = A(\text{Im } w - Q(u, u)) \in A(\Omega) = \Omega.$$

ゆえに $h_{A,B} \in \text{Aff}(D)$. そして原点を動かさないなので, $h_{A,B} \in \text{Stab}_0\text{Aff}(D)$.

(2) $g \in \text{Aff}(D)$ とすると, 補題 7.3 から $g \in \text{Aff}(\Sigma)$ である. そうすると定理 7.1 より, $g = g(A, B, a, b) = n(a, b)h_{A,B}$ の形である. よって $h_{A,B} = n(a, b)^{-1}g \in \text{Aff}(D)$. これより $h_{A,B} \in \text{Stab}_0\text{Aff}(D)$. ゆえに (1) より $A(\Omega) = \Omega$ となって, 包含関係 \subset が示せた. 逆向きは明らかであろう.

(3) $g \in \text{Aff}(D)$ ならば, $g \in \text{Aff}(\Sigma)$ なので, $g = nh$ ($n \in N_Q, h \in H_Q$) と書かれる. ここで, $h = n^{-1}g \in \text{Aff}(D)$ であるから, $h \in \text{Stab}_0\text{Aff}(D)$ である. 以下定理 7.1 の (2) と同様.

(4) $g = g(A, B, a, b) \in \text{Stab}_{(0, iE)}\text{Aff}(D)$ とする. (3) により, $g = n(a, b)h_{A,B}$ ($h_{A,B} \in \text{Stab}_0\text{Aff}(D)$) と表すと

$$\begin{aligned} (0, iE) &= g \cdot (0, iE) = n(a, b)h_{A,B} \cdot (0, iE) = n(a, b) \cdot (0, iAE) \\ &= (b, iAE + a + iQ(b, b)). \end{aligned}$$

これより, $a = 0, b = 0, AE = E$ が出るので, $g = h_{A,B} \in \text{Stab}_0\text{Aff}(D)$. □

§8. Affine 等質な Siegel 領域

$D = D(\Omega, Q) = \{(u, w) \in U \times W ; \text{Im } w - Q(u, u) \in \Omega\}$ を Siegel 領域とする. 定理 7.4 より, $\text{Aff}(D) = N_Q \times \text{Stab}_0\text{Aff}(D)$ となる. ここで

$$\text{Stab}_0\text{Aff}(D) = \left\{ h_{A,B} := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in H_Q ; A \in G(\Omega) \right\}$$

となる. ただし,

$$H_Q := \{h_{A,B} ; B \in GL(U), A \in GL(V), A(Q(u, u)) = Q(Bu, Bu) (\forall u \in U)\}.$$

定義. D が **affine** 等質であるとは, $\text{Aff}(D)$ が D に推移的に作用することである.

補題 6.9 で扱った表現 $\rho : H_Q \ni h_{A,B} \mapsto A \in GL(V)$ を思い出そう.

命題 8.1. D が affine 等質であるための必要十分条件は, $\rho(\text{Stab}_0\text{Aff}(D))$ が Ω に推移的に働くことである.

証明. $E \in \Omega$ を固定する.

[\implies] 任意に $x \in \Omega$ をとると, $(0, ix) \in D$ である. 仮定より, $g \in \text{Aff}(D)$ が存在して $g \cdot (0, iE) = (0, ix)$ となる. ここで, $g = n(a, b)h_{A,B}$ ($n \in N_Q$, $h_{A,B} \in \text{Stab}_0 \text{Aff}(D)$) と表すと

$$(0, ix) = g \cdot (0, iE) = n(a, b) \cdot (0, iAE) = (b, iAE + a + iQ(b, b)).$$

ゆえに $b = 0$, $a = 0$, $AE = x$ を得る. $AE = x$ は $\rho(\text{Stab}_0 \text{Aff}(D))$ が Ω に推移的に働いていることを示している.

[\impliedby] $z = (u, w) \in D$ が与えられたとき, $\text{Im } w - Q(u, u) \in \Omega$ であるから, 仮定より, $h_{A,B} \in \text{Stab}_0 \text{Aff}(D)$ が存在して, $AE = \text{Im } w - Q(u, u)$. ゆえに

$$h_{A,B} \cdot (0, iE) = (0, iAE) = (0, i \text{Im } w - iQ(u, u)).$$

$a := \text{Re } w \in V$, $b := u \in U$ とすると

$$\begin{aligned} n(a, b)h_{A,B} \cdot (0, E) &= n(a, b) \cdot (0, i \text{Im } w - iQ(u, u)) \\ &= (b, i \text{Im } w - iQ(u, u) + a + iQ(b, b)) \\ &= (u, w) \end{aligned}$$

となって, D は affine 等質である. □

定義. $\text{Hol}(D)$ が D に推移的に働くとき, D は等質であるという. $\text{Aff}(D) \subset \text{Hol}(D)$ より, affine 等質ならば等質である.

実は次の定理が成り立つ.

定理 8.2. D が等質 $\iff D$ が affine 等質.

補題 8.3. G は局所コンパクト群で, 第2可算 (可算個の開集合の基が存在する), かつ局所連結であるとする. G の単位元の連結成分を G° とする. G° は G の正規部分群であり, G の局所連結性から開集合である. G が連結な局所コンパクト空間 M に推移的に働くならば, G° がすでに M に推移的に働いている.

以下 $D = D(\Omega, Q)$ は (affine) 等質 Siegel 領域とする. 補題 8.3 より, $E \in \Omega$ とするとき

$$D \approx \text{Aff}(D)/\text{Stab}_{(0, iE)} \text{Aff}(D) \approx \text{Aff}(D)^\circ/\text{Stab}_{(0, iE)}(\text{Aff}(D)^\circ)$$

実は, $\text{Stab}_{(0,iE)}(\text{Aff}(D)^\circ) = (\text{Stab}_{(0,iE)}\text{Aff}(D))^\circ$ であることが示せる²⁷ので,

$$D \approx \text{Aff}(D)^\circ / \text{Stab}_{(0,iE)}\text{Aff}(D)^\circ$$

というように, 括弧をはずして書いてもよからう.

煩雑なので, 以下では, $K := \text{Stab}_{(0,iE)}\text{Aff}(D)^\circ$ とおく. 定理 7.4 (4) と K の連結性より, $K \subset \text{Stab}_0(\text{Aff}(D))^\circ$ となっていることに注意.

定理 8.4. 対角成分がすべて正の実下三角行列のなす群の部分群として実現できる群 H_0 を用いて,

$$\text{Stab}_0\text{Aff}(D)^\circ = H_0K, \quad H_0 \cap K = \{ \text{単位元} \}$$

と表される.

以下 $H := N_Q \times H_0$ とおいて, H を $\text{Hol}(D)$ の岩沢部分群と呼ぼう.

定理 8.5. (1) $\text{Aff}(D)^\circ = HK$ であって, $H \cap K = \{ \text{単位元} \}$.

(2) H は可解であって, D に単純推移的に働く.

(3) $\rho: H_Q \ni h_{A,B} \mapsto A \in GL(V)$ の H_0 への制限は単射であり, これにより H_0 は Ω に単純推移的に働く.

証明. (1) と (2) の単純推移性は明らかであろう.

(3) 補題 6.9 より, $\text{Ker}(\rho) \cap H_0$ は対角成分が正の実下三角行列のなす群のコンパクト部分群と見ることができ, それは単位元からなるものしかない. $E \in \Omega$ とし, $h_{A,B} \in H_0$ かつ $\rho(h_{A,B})E = E$ ならば, $AE = E$ となるから, $h_{A,B} \cdot (0, iE) = (0, iAE) = (0, iE)$. ゆえに $h_{A,B} \in H_0 \cap K = \{ \text{単位元} \}$. \square

複素ベクトル空間 Z のアフィン変換群を $\text{Aff}(Z)$ とすると, $\text{Aff}(Z)$ は行列のなす群

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|c} T & c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right); T \in GL(Z), c \in Z \right\}$$

と同一視される. 実際

$$\left(\begin{array}{c|c} T & c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} T' & c' \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} TT' & Tc' + c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

であるから, アフィン変換 $g(T, c): z \mapsto Tz + c$ と行列 $\left(\begin{array}{c|c} T & c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$ の対応が, 群同型を与えている (§6 参照).

²⁷ D が単連結であることによる.

$\text{Aff}(Z)$ の Lie 代数を $\mathfrak{aff}(Z)$ で表す. $\mathfrak{aff}(Z)$ は行列のなすベクトル空間

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & c \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right); A \in \mathcal{L}(Z), c \in Z \right\}$$

に通常のブラケット積を導入したものであると見ることができる:

$$\left[\left(\begin{array}{c|c} A & c \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} A' & c' \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \right] = \left(\begin{array}{c|c} AA' - A'A & Ac' - A'c \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\text{Aff}(D)$ は $\text{Aff}(U \oplus W)$ の部分 Lie 群, 従って Lie 代数 $\mathfrak{aff}(D)$ は $\mathfrak{aff}(U \oplus W)$ の部分 Lie 代数である. 対応は

$$h_{A,B} \leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c|c} B & 0 & 0 \\ \hline 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad n(a,b) \leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c|c} I & 0 & b \\ \hline 2iQ(\cdot, b) & I & a + iQ(b, b) \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

となっている. 以下 \leftrightarrow と書かず $=$ と書くことにする. 簡単な計算で

$$\begin{aligned} \exp \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & b \\ \hline 2iQ(\cdot, b) & 0 & a \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ = \left(\begin{array}{c|c|c} I & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & b \\ \hline 2iQ(\cdot, b) & 0 & a \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2iQ(b, b) \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ = n(a, b) \end{aligned}$$

となるので, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$n(0, tb) = \exp t \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & b \\ \hline 2iQ(\cdot, b) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad n(ta, 0) = \exp t \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

従って, N_Q の Lie 代数

$$\mathfrak{n}_Q := \{ X \in \mathfrak{aff}(U \times W); \exp tX \in N_Q (\forall t \in \mathbb{R}) \}$$

は,

$$\mathfrak{h}_{\frac{1}{2}} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & b \\ \hline 2iQ(\cdot, b) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right); b \in U \right\}, \quad \mathfrak{h}_1 := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right); a \in V \right\}$$

とおくとき, $\mathfrak{n}_Q = \mathfrak{h}_{\frac{1}{2}} + \mathfrak{h}_1$ (ベクトル空間としての和) と記述される. また

$$(8.1) \quad \left[\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & b \\ \hline 2iQ(\cdot, b) & 0 & a \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & b' \\ \hline 2iQ(\cdot, b') & 0 & a' \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right] = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 \text{Im} Q(b, b') \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

より, $[\mathfrak{n}_Q, [\mathfrak{n}_Q, \mathfrak{n}_Q]] = \{0\}$ となることがわかる. この事実を, Lie 代数 \mathfrak{n}_Q は 2-step べき零であるという.

以上より, $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$, $\mathfrak{h}_0 := \text{Lie}(H_0)$ とおくと, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{n}_Q = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_{\frac{1}{2}} + \mathfrak{h}_1$.

命題 8.6. $i, j = 0, \frac{1}{2}, 1$ に対して, $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j] \subset \mathfrak{h}_{i+j}$. ただし, $i+j \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ のときは $\mathfrak{h}_{i+j} = \{0\}$ と約束する.

証明. $\mathfrak{h}_Q := \text{Lie}(H_Q)$ とおくと,

$$(8.2) \quad \mathfrak{h}_Q = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} B & 0 & 0 \\ \hline 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) ; \begin{array}{l} B \in \mathcal{L}(U), A \in \mathcal{L}(V) \\ A(Q(u, u)) = Q(Bu, u) + Q(u, Bu) \ (\forall u \in U) \end{array} \right\}$$

となる. $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}_Q$ であり, $B \in \mathcal{L}(U), A \in \mathcal{L}(V)$ が (8.2) にある関係をみたすとき,

$$\left[\left(\begin{array}{c|c|c} B & 0 & 0 \\ \hline 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & b \\ \hline 2iQ(\cdot, b) & 0 & a \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right] = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & Bb \\ \hline 2iQ(\cdot, Bb) & 0 & Aa \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

これより $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_j] \subset \mathfrak{h}_j$ ($j = \frac{1}{2}, 1$) がわかる. $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0] \subset \mathfrak{h}_0$ は \mathfrak{h}_0 自身が Lie 代数であることから. その他のブラケット関係は (8.1) よりわかる. \square

§9. 複素構造

$D = D(\Omega, Q) = \{(u, w) \in U \times W ; \text{Im } w - Q(u, u) \in \Omega\}$ を等質 Siegel 領域とする.

先週の結果: $\text{Aff}(D)$ の部分群 H で, D に単純推移的に働くものがある. H は可解群で, $H = N_Q \rtimes H_0$ と表される. ここで N_Q は 2-step nilpotent で, D の Shilov 境界に単純推移的に働き, $H_0 \subset H_Q$ は, $\rho: H_Q \rightarrow GL(V)$ の制限により, Ω に単純推移的に働く. H, H_0, N_Q の Lie 代数をそれぞれ対応するドイツ文字で表す:

$$\mathfrak{h} := \text{Lie}(H), \quad \mathfrak{h}_0 := \text{Lie}(H_0), \quad \mathfrak{n}_Q := \text{Lie}(N_Q).$$

このとき, $\mathfrak{n}_Q = \mathfrak{h}_{\frac{1}{2}} + \mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}_Q + \mathfrak{h}_0$ で, $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j] \subset \mathfrak{h}_{i+j}$ が成り立つ.

以下 $E \in \Omega$ を固定し, $\alpha: H \rightarrow D$ を $(0, iE) \in D$ を通る軌道写像とする:

$$\alpha(n(a, b)h_0) := n(a, b)h_0 \cdot (0, iE) \quad (n(a, b) \in N_Q, h_0 \in H_0).$$

作用を具体的に書けば (cf. §7)

$$\alpha(n(a, b)h_0) = (b, a + i\rho(h_0)E + iQ(b, b)).$$

α は H から D の上への微分同相になっているので, H の単位元における微分 α_* は, \mathfrak{h} から $(0, iE)$ での D の接空間 $T_{(0, iE)}(D)$ の上への実線型同型になっている. D

は $U \oplus W$ の領域なので、以下では $T_{(0,iE)}(D) = U \oplus W$ とみなす.

$$\alpha_*(X) = \left. \frac{d}{dt} \alpha(\exp tX) \right|_{t=0} \quad (X \in \mathfrak{h})$$

に従って、実際に計算しよう. 準同型 $\rho: H_Q \rightarrow GL(V)$ の単位元における微分 (Lie 代数の準同型 $\mathfrak{h}_Q \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ になる) を ρ_* で表すことにする:

$$\rho_*(T) = \left. \frac{d}{dt} \rho(\exp tT) \right|_{t=0} \quad (T \in \mathfrak{h}_Q).$$

また以下では、 $a \in V, b \in U$ として

$$Y_b = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & b \\ \hline 2iQ(\cdot, b) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{h}_{\frac{1}{2}}, \quad X_a = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{h}_1$$

とおく.

補題 9.1. $T \in \mathfrak{h}_0, a \in V, b \in U$ として、 $\alpha_*(T + Y_b + X_a) = (b, a + i\rho_*(T)E)$.

証明. 線型性により、 $\alpha_*(T), \alpha_*(Y), \alpha_*(X)$ のそれぞれを別個に示せばよい.

$$(1) T \in \mathfrak{h}_0 \text{ のとき: } \alpha_*(T) = \left. \frac{d}{dt} (0, i\rho(\exp tT)E) \right|_{t=0} = (0, i\rho_*(T)E).$$

(2) $\exp tY_b = n(0, tb)$ であることに注意すると

$$\alpha_*(Y_b) = \left. \frac{d}{dt} (tb, t^2Q(b, b)) \right|_{t=0} = (b, 0).$$

(3) 同様に $\exp tX_a = n(ta, 0)$ より

$$\alpha_*(X_a) = \left. \frac{d}{dt} (0, ta) \right|_{t=0} = (0, a).$$

よって証明終わり. □

H_0 が Ω に単純推移的に働いているので、 $\mathfrak{h}_0 \ni T \mapsto \rho_*(T)E \in V$ は線型同型写像であることに注意. この逆写像を ζ_0 で表すと、 $\zeta_0(\rho_*(T)E) = T$ ($T \in \mathfrak{h}_0$) であり、任意の $v \in V$ に対して $\zeta_0(v) \in \mathfrak{h}_0$ であって、 $\rho_*(\zeta_0(v))E = v$ をみたしている.

さて、 $Z := U \oplus W$ は複素線型空間なので、自然な複素構造を持つ. すなわち、虚数単位 i を掛ける写像 $j(z) = iz$ ($z \in Z$) がある. これを線型同型 α_* で \mathfrak{h} に引き戻したものを J で表す:

$$J := \alpha_*^{-1} \circ j \circ \alpha_* \in GL(\mathfrak{h}).$$

明らかに $J^2 = -\text{Id}$ であるが、具体的な作用は次の通り.

補題 9.2. $T \in \mathfrak{h}_0$, $b \in U$, $a \in V$ のとき,

$$J(T + Y_b + X_a) = \zeta_0(a) + Y_{ib} - X_{\rho_*(T)E}.$$

証明. (1) $T \in \mathfrak{h}_0$ のとき, $JT = \alpha_*^{-1}(i\alpha_*(T)) = \alpha_*((0, -\rho_*(T)E)) = -X_{\rho_*(T)E}$.

(2) $Y = Y_b$ のとき, $JY_b = \alpha_*^{-1}((0, ib)) = Y_{ib}$.

(3) $JX_a = \alpha_*^{-1}((0, ia)) = \alpha_*^{-1}((0, i\rho_*(\zeta_0(a))E)) = \zeta_0(a)$. □

J を \mathfrak{h} の複素化 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の上の複素線型写像に拡張して,

$$\mathfrak{h}^{\pm} := \{Z \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}; JZ = \pm iZ\} \quad (\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \text{ における } J \text{ の } \pm i \text{ 固有空間})$$

とおく. \mathfrak{h}^+ (resp. \mathfrak{h}^-) は複素多様体 H (D に微分同相) 上の正則な (resp. 反正則な) ベクトル場で, H による左移動と可換なもの全体である. ゆえに \mathfrak{h}^{\pm} は $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の部分 Lie 代数になっている. さらに, $\mathfrak{h}^{\pm} = \{X \mp iJX; X \in \mathfrak{h}\}$ であることにも注意:

$$J(X \mp iJX) = JX \pm iX = \pm i(X \mp iJX).$$

補題 9.3. J は次の「可積分条件」をみたす:

$$[JX, JY] = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{h}).$$

証明. \mathfrak{h}^- が Lie 代数であることを書き換えよう. すなわち, $X, Y \in \mathfrak{h}$ のとき, $X + iJX, Y + iJY \in \mathfrak{h}^-$ であるから

$$\mathfrak{h}^- \ni [X + iJX, Y + iJY] = ([X, Y] - [JX, JY]) + i([JX, Y] + [X, JY]).$$

ゆえに, $[JX, Y] + [X, JY] = J([X, Y] - [JX, JY])$. 両辺に J を作用させれば, 所要の等式を得る. □

次に認容線型形式の存在を示そう: これは $\omega \in \mathfrak{h}^*$ で次の条件をみたすもの:

$$\langle X | Y \rangle_{\omega} := \langle \omega, [JX, J] \rangle \text{ は } \mathfrak{h} \text{ に } J \text{ 不変な内積を定める.}$$

ここで内積が J 不変であるとは, その内積で J が直交変換となることをいう:

$$\langle JX | JY \rangle_{\omega} := \langle X | Y \rangle_{\omega} \quad (\forall X, Y \in \omega).$$

そのために Berman 計量について触れる. $U \oplus W$ を実内積空間と見ての Lebesgue 測度を $dm(z)$ で表して

$$\mathcal{H}^2(D) := \left\{ f; f \text{ は } D \text{ 上正則で } \int_D |f(z)|^2 dm(z) < \infty \right\}$$

とおく²⁸. $f_1, f_2 \in \mathcal{H}^2(D)$ に対して

$$(f_1 | f_2) := \int_D f_1(z) \overline{f_2(z)} dm(z)$$

とおくと, $(f_1 | f_2)$ は $\mathcal{H}^2(D)$ にエルミート内積を定める. これによって, $\mathcal{H}^2(D)$ は Hilbert 空間をなしている. すなわち, ノルム $\|f\| := (f | f)^{1/2}$ に関して完備なノルム空間になっている. さらに, 任意の $z \in D$ に対して, 線型形式 $\mathcal{H}^2(D) \ni f \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ は連続になっている.

定理 9.4 (Riesz の定理). Hilbert 空間においては, 任意の連続な線型形式は内積によって一意的に表される.

Riesz の定理を $\mathcal{H}^2(D)$ 上の連続な線型形式 $f \mapsto f(z)$ に適用すると, 各 $z \in D$ に対して, 一意的に $K_z \in \mathcal{H}^2(D)$ が存在して

$$f(z) = (f | K_z) \quad (\forall f \in \mathcal{H}^2(D)).$$

補題 9.5. $K_z(w) = \overline{K_w(z)}$ ($z, w \in D$).

証明. $K_z \in \mathcal{H}^2(D)$ より, $K_z(w) = (K_z | K_w) = \overline{(K_w | K_z)} = \overline{K_w(z)}$. □

定義. $K(z, w) := K_w(z)$ とおいて, これを D の **Bergman 核** と呼ぶ. 補題 9.5 より, $K(z, w)$ は z に関して正則, w に関して反正則である.

- $K(z, z) = K_z(z) = (K_z | K_z) = \|K_z\|^2 \geq 0$.

注意 9.6. Φ が D で正則 $\iff \Phi'(z) : w \mapsto D_w \Phi(z) := \left. \frac{d}{dt} \Phi(z + tw) \right|_{t=0}$ が任意の $z \in D$ において複素線型写像.

実際, 正規直交基底を固定して, $U \oplus W = \mathbb{C}^N$ と見る. そうしておいて, $w = (w_1, \dots, w_N)$ とし, $w_j = u_j + iv_j$ ($u_j, v_j \in \mathbb{R}$) と書くと

$$D_w = \sum_{j=1}^N \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

ここで, 右辺の $\frac{\partial}{\partial x_j}$ や $\frac{\partial}{\partial y_j}$ は $f(z_1, \dots, z_N)$ を $x_1, y_1, \dots, x_N, y_N$ の函数と見て偏微分することを意味する. 以下の作用素を導入すると便利である:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

²⁸ D は有界領域に正則同相なので, $\mathcal{H}^2(D) \neq \{0\}$ が示される.

また

$$\partial_w := \sum_{j=1}^N w_j \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \bar{\partial}_w := \sum_{j=1}^N \bar{w}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

とおくと, $D_w = \partial_w + \bar{\partial}_w$ が成り立つ. 実際

$$\begin{aligned} D_w &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{2}(w_j + \bar{w}_j) \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2i}(w_j - \bar{w}_j) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{w_j}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) + \frac{\bar{w}_j}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^N \left(w_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \bar{w}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) \\ &= \partial_w + \bar{\partial}_w. \end{aligned}$$

命題 9.7. $\Phi \in \text{Hol}(D)$ とする.

(1) $T_\Phi f(z) := (\det_{\mathbb{C}} \Phi'(z)) f(\Phi(z))$ ($f \in \mathcal{H}^2(D)$) とおくと, T_Φ は $\mathcal{H}^2(D)$ の全射な等長同型である. ただし, $\det_{\mathbb{C}} \Phi'(z)$ は複素線型写像 $\Phi'(z)$ の複素行列式である.

(2) $z, w \in D$ のとき, $K(z, w) = \det_{\mathbb{C}} \Phi'(z) K(\Phi(z), \overline{\Phi(w)}) \det_{\mathbb{C}} \Phi'(w)$.

補題 9.8. $F : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ を複素線型写像とすると, $\det_{\mathbb{R}} F = |\det_{\mathbb{C}} F|^2$. ここで, $\det_{\mathbb{R}} F$ は実線型写像 $\mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ としての実行列式.

証明. \mathbb{R}^{2N} 上の実線型写像として, 基底 $e_1, \dots, e_N, ie_1, \dots, ie_N$ に関する F の行列は

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \quad (A, B \text{ は } N \text{ 次実正方行列})$$

の形に表される. ゆえに

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A + iB & -B + iA \\ B & A \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A + iB & 0 \\ B & A - iB \end{pmatrix} = |\det(A + iB)|^2 \end{aligned}$$

となって証明終わり. □

命題 9.7 の証明. (1) $f \in \mathcal{H}^2(D)$ とする. 補題により, $|\det_{\mathbb{C}} \Phi'(z)|^2 = \det_{\mathbb{R}} \Phi'(z)$ であるから

$$\begin{aligned} \|Tf\|^2 &= \int_D |Tf(z)|^2 dm(z) \\ &= \int_D |f(\Phi(z))|^2 |\det_{\mathbb{C}} \Phi'(z)|^2 dm(z) \\ &= \int_D |f(\Phi(z))|^2 \det_{\mathbb{R}} \Phi'(z) dm(z) \\ &= \int_D |f(z')|^2 dm(z') = \|f\|^2. \end{aligned}$$

全射であることは, Φ を Φ^{-1} で置き換えれば, T^{-1} が得られることより明らか.

(2) 定義により, 任意の $f \in \mathcal{H}^2(D')$ に対して

$$\begin{aligned} (9.1) \quad Tf(z) &= f(\Phi(z)) \det_{\mathbb{C}} \Phi'(z) = (f | K(\cdot, \Phi(z))) \det_{\mathbb{C}} \Phi'(z) \\ &= (f | K(\cdot, \Phi(z)) \overline{\det_{\mathbb{C}} \Phi'(z)}) \end{aligned}$$

一方 T は全射な等長同型であるから, $Tf(z) = (Tf | K_z) = (f | T^{-1}K_z)$. ここで

$$T^{-1}K_z(u) = K_z(\Phi^{-1}(u)) \det_{\mathbb{C}} \Phi^{-1}(u) = K(\Phi^{-1}(u), z) \det_{\mathbb{C}} \Phi^{-1}(u)$$

であるから, (9.1) から

$$K(\Phi^{-1}(u), z) \det_{\mathbb{C}} \Phi^{-1}(u) = K(u, \Phi(z)) \overline{\det_{\mathbb{C}} \Phi'(z)}$$

を得る. $u = \Phi(w)$ とおくと, $\det_{\mathbb{C}}(\Phi^{-1})'(\Phi(w)) = \frac{1}{\det_{\mathbb{C}} \Phi'(w)}$ より所要の結果を得る. \square

等質 Siegel 領域 D の Bergman 核 $K(z_1, z_2)$ は明示的な表示を持つ.

命題 9.9. (1) $\Omega + iV$ 上の正則関数 κ が存在して,

$$K(z_1, z_2) = c \kappa \left(\frac{w_1 - w_2^*}{2i} - Q(u_1, u_2) \right) \quad (z_j = (u_j, w_j) \in D; j = 1, 2).$$

ただし $c > 0$ は定数.

(2) (1) の κ は, $\kappa(\rho(h_0)x) = \chi(h_0)^{-1} \kappa(x)$ ($h_0 \in H_0, x \in \Omega$) をみたす. ただし,

$$\chi(h_{A,B}) := \det_{\mathbb{R}} h_{A,B} = (\det_V A)^2 (\det_{U_{\mathbb{R}}} B) \quad (h_{A,B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in H_0).$$

ここで $U_{\mathbb{R}}$ は複素ベクトル空間 U を実ベクトル空間とみなしたもので, $\det_{U_{\mathbb{R}}} B$ は $B \in GL(U)$ を $U_{\mathbb{R}}$ 上の実線型写像とみなしたものの行列式である.

注意 9.10. 命題の (1) の κ の中にある変数について

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{w_1 - w_2^*}{2i} - Q(u_1, u_2)\right) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} w_1 + \operatorname{Im} w_2 - \frac{1}{2}(Q(u_1, u_2) + Q(u_2, u_1)) \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{Im} w_1 - Q(u_1, u_1)) + \frac{1}{2}(\operatorname{Im} w_2 - Q(u_2, u_2)) + \frac{1}{2}Q(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \\ &\in \Omega + \Omega + \overline{\Omega} \subset \Omega. \end{aligned}$$

証明. 一致の定理より, $z_1 = z_2 = z = (u, w)$ のときに命題を示せば十分. H_0 は Ω に単純推移的に働くので, 各 $x \in \Omega$ に対して, 一意的に $h_0 \in H_0$ が存在して $\rho(h_0)E = x$ となる. 以下この h_0 を $\eta_0(x)$ と表す. すなわち $\rho(\eta_0(x))E = x$ である.

さて $(u, w) \in D$ のとき, $\operatorname{Im} w - Q(u, u) \in \Omega$ であるから, $h_0 = \eta_0(\operatorname{Im} w - Q(u, u))$ ととり, $a = \operatorname{Re} w \in V$, $b = u \in U$ とおけば, 命題 8.1 の [\Leftarrow] の証明のようにして,

$$n(a, b)h_0 \cdot (0, iE) = (u, w) = z$$

となる. ゆえに, $g = n(a, b)h_0$ とおくと

$$(9.2) \quad \begin{aligned} K(z, z) &= K(g \cdot (0, iE), g \cdot (0, iE)) \\ &= |\det_{\mathbb{C}} g'(0, iE)|^{-2} K((0, iE), (0, iE)). \end{aligned}$$

h_0 は D に線型に働くので, $h'_0(z) = h_0$ ($\forall z \in D$) であり,

$$n(a, b) = \left(\begin{array}{c|c|c} I & 0 & b \\ \hline 2iQ(\cdot, b) & I & a + iQ(b, b) \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

であるから, $\det_{\mathbb{C}} n(a, b)'(z) = I$ ($\forall z \in D$). ゆえに $g'(z) = h_0$ ($\forall z \in D$). 従って, $c := K((0, iE), (0, iE)) > 0$ とおくと²⁹

$$K(z, z) = c |\det_{\mathbb{C}} g'(0, iE)|^{-2} = c (\det_{\mathbb{R}} g'(0, iE))^{-1} = c (\det_{\mathbb{R}} h_0)^{-1}.$$

$h_0 = \eta_0(\operatorname{Im} w - Q(u, u))$ であつたから, $\kappa(x) := (\det_{\mathbb{R}} \eta_0(x))^{-1}$ ($x \in \Omega$) とおくと,

$$K(z, z) = c \kappa(\operatorname{Im} w - Q(u, u)) = c \kappa\left(\frac{w - w^*}{2i} - Q(u, u)\right).$$

次の補題を証明なしで認めよう: そうすると命題の (1) の証明が終わる.

補題 9.11. Ω 上の函数 $\kappa(x) := \theta(x)^{-1}$ は $\Omega + iV$ 上の正則函数に解析接続される. その解析接続は Ω の双対凸錐 Ω^* 上のある函数の Laplace 変換で得られる.

²⁹ $c = 0$ ならば, (9.2) より $K_z = 0$ ($\forall z \in D$) となるので, $\mathcal{H}^2(D) = \{0\}$ となってしまう.

命題の (2) の証明に移ろう. 定義より $\eta_0(\rho(h_0)x) = h_0\eta_0(x)$ ($h_0 \in H_0, x \in \Omega$) であるから

$$\kappa(\rho(h_0)x) = \det_{\mathbb{R}} \eta_0(\rho(h_0)x)^{-1} = (\det_{\mathbb{R}} h_0)^{-1} (\det_{\mathbb{R}} \eta_0(x))^{-1} = \chi(h_0)^{-1} \kappa(x).$$

以上で証明終わり. \square

§10. 認容線型形式の存在

$D = D(\Omega, Q) = \{(u, w) \in U \times W ; \operatorname{Im} w - Q(u, u) \in \Omega\}$ を等質 Siegel 領域とする. また $E \in \Omega$ を固定する. D の参照点としては $(0, iE)$ を考える.

先週までの復習: $\exists H \subset \operatorname{Aff}(D)$ s.t. $H \curvearrowright \Omega$ は単純推移的.

$\mathfrak{h} := \operatorname{Lie}(H)$ は $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_{\frac{1}{2}} + \mathfrak{h}_1$ と分解され, $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j] \subset \mathfrak{h}_{i+j}$ が成り立つ. 特に $\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1$ は部分 Lie 代数. $N_Q \subset \operatorname{Aff}(D)$ は D の Shilov 境界 Σ に単純推移的に作用する. $\mathfrak{n}_Q := \operatorname{Lie}(N_Q)$ とすると, $\mathfrak{n}_Q = \mathfrak{h}_{\frac{1}{2}} + \mathfrak{h}_1$ となる. $a \in V, b \in U$ に対して

$$Y_b = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & b \\ \hline 2iQ(\cdot, b) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad X_a = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

とおくと, $\mathfrak{h}_{\frac{1}{2}} = \{Y_b ; b \in U\}, \mathfrak{h}_1 = \{X_a ; a \in V\}$ であり, $[Y_b, Y_{b'}] = X_{4\operatorname{Im} Q(b, b')}$ である. また $T = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}_0$ ($A \in \mathcal{L}(V), B \in \mathcal{L}(U)$) のとき, $[T, Y_b] = Y_{Bb}, [T, X_a] = X_{Aa}$ である. D の複素構造から, \mathfrak{h} には $J^2 = -\operatorname{Id}$ をみたす実線型写像が存在して,

$$J(T + Y_b + X_a) = \zeta_0(a) + Y_{ib} - X_{\rho_*(T)E} \quad (T \in \mathfrak{h}_0, b \in U, a \in V).$$

ここで, ρ_* は $\rho : H_0 \rightarrow GL(V)$ の単位元における微分であり, $a \in V$ に対して, $\zeta_0(a)$ は, $\rho_*(\zeta_0(a))E = a$ で決まる一意的な \mathfrak{h}_0 の元を表す.

認容線型形式の存在を示すのが今日の目的: これは $\omega \in \mathfrak{h}^*$ で

$$\langle X | Y \rangle_{\omega} := \langle \omega, [JX, J] \rangle \text{ は } \mathfrak{h} \text{ に } J \text{ 不変な内積を定めるもの.}$$

$K(z_1, z_2)$ を D の Bergman 核とする. $K(z_1, z_2)$ は次のように書ける:

$$K(z_1, z_2) = c \kappa \left(\frac{w_1 - w_2^*}{2i} - Q(u_1, u_2) \right) \quad (z_j = (u_j, w_j) \in D; j = 1, 2).$$

ただし $c > 0$ は定数で, κ は $\Omega + iV$ 上の正則函数. さらに κ は, $\kappa(\rho(h_0)x) = \chi(h_0)^{-1}\kappa(x)$ ($h_0 \in H_0, x \in \Omega$) をみたす. ただし,

$$\chi(h_{A,B}) := \det_{\mathbb{R}} h_{A,B} = (\det_V A)^2 (\det_{U_{\mathbb{R}}} B) \quad (h_{A,B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in H_0).$$

ここで $U_{\mathbb{R}}$ は複素ベクトル空間 U を実ベクトル空間とみなしたもので, $\det_{U_{\mathbb{R}}} B$ は $B \in GL(U)$ を $U_{\mathbb{R}}$ 上の実線型写像とみなしたものの行列式である.

さて Bergman 核から **Bergman** 計量と呼ばれる計量が D に定義される. D は $Z = U \oplus W$ の領域であるから, D の各点の接空間は Z と同一視される. そして

$$\partial_w := \sum_{j=1}^N w_j \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \bar{\partial}_w := \sum_{j=1}^N \bar{w}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \quad (N := \dim_{\mathbb{C}} Z)$$

とするとき, 各 $z \in D$ において

$$Z \times Z \ni (w, w') \mapsto \partial_w \bar{\partial}_{w'} \log K(z, z)$$

は w について複素線型, w' については複素反線型である. 実はこの sesqui-linear form が, 正定値であることが示される:

$$(10.1) \quad \partial_w \bar{\partial}_w \log K(z, z) > 0 \quad (\forall w \in Z, w \neq 0).$$

定義. $\langle \omega_0, v \rangle := -\frac{d}{dt} \log \kappa(E + tv) \Big|_{t=0} = -D_v \log \kappa(E)$ ($v \in V$).

ここで, $\log \kappa$ は滑らかな函数なので, 右辺は v について線型であることに注意. 従って, 右辺は v について線型形式を定めるので, それを $\omega_0 \in V^*$ で表している.

定理 10.1. $\omega_0 \in \Omega^*$. すなわち, 任意の $x \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して, $\langle \omega_0, x \rangle > 0$.

以下この定理を証明しよう:

補題 10.2. Ω 上の函数 $\log \kappa(x)$ は凸函数である. すなわち, 任意の $x, y \in \Omega$ と $t \in [0, 1]$ に対して

$$\log \kappa((1-t)x + ty) \leq (1-t) \log \kappa(x) + t \log \kappa(y).$$

証明. これは V 上の実双線型形式 $D_{v_1} D_{v_2} \log \kappa(x) = \partial_{v_1} \bar{\partial}_{v_2} \log K((0, ix), (0, ix))$ が正定値であることによる ((10.1) 参照). 実際 $f(x) := \log \kappa(x)$ として, 閉区間 $[0, 1]$ 上の函数

$$F(t) := f((1-t)x + ty) - (1-t)f(x) - tf(y)$$

を考えよう. $F(0) = F(1) = 0$ ゆえ, ロルの定理から, $F'(t_0) = 0$ となる t_0 ($0 < t_0 < 1$) が存在するが, $F''(t) > 0$ より $F'(t)$ は狭義単調増加なので, $F'(t)$ の零点は $t = t_0$ のみ. 従って, $F(t)$ は $t = t_0$ でのみ極小値をとり, 結局 $F(t) \leq 0$ ($0 \leq t \leq 1$) がわかる. \square

補題 10.3. Ω 上の函数 $\kappa(x)$ は凸函数である.

証明. まず, 次の不等式に注意する (容易に証明できる):

$$a \geq 0, b \geq 0, p > 0, q > 0 \text{ で } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ のとき, } ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

さて補題 10.2 より $\log \kappa$ が凸函数であること, 及びこの不等式を $a = \kappa(x)^{1-t}$, $b = \kappa(y)^t$, $p = \frac{1}{1-t}$, $q = \frac{1}{t}$ として用いることにより, $x, y \in \Omega$, $t \in [0, 1]$ のとき

$$\kappa((1-t)x + ty) \leq \kappa(x)^{1-t} \kappa(y)^t \leq (1-t)\kappa(x) + t\kappa(y)$$

を得て, 証明が終わる. \square

ここで $\lambda > 0$ のとき

$$h_\lambda := h_{\lambda I, \lambda^{1/2} I} = \begin{pmatrix} \lambda I_U & 0 \\ 0 & \lambda^{1/2} I_V \end{pmatrix} \in H_0$$

を考える. この h_λ は $\rho(h_\lambda)E = \lambda E$ をみたす H_0 の元で一意的に定まるものである. そうすると, $\delta := 2 \dim_{\mathbb{R}} V + \dim_{\mathbb{C}} U > 0$ とおくと

$$(10.2) \quad \kappa(\lambda x) = (\det_V \lambda I_V)^{-2} (\det_{U_{\mathbb{R}}} \lambda^{1/2} I_{U_{\mathbb{R}}})^{-1} \kappa(x) = \lambda^{-\delta} \kappa(x) \quad (x \in \Omega, \lambda > 0).$$

となっていることがわかる.

補題 10.4. $x \in \Omega$, $y \in \bar{\Omega}$ のとき, $\kappa(x+y) \leq \kappa(x)$.

証明. まず $x+y \in \Omega$ であることに注意しておこう. 補題 10.3 より, 函数 κ が凸であるので, $x, y \in \Omega$, $0 < \lambda < 1$ のとき

$$\begin{aligned} \kappa(x+y) &= \kappa(\lambda(\lambda^{-1}x) + (1-\lambda)(1-\lambda)^{-1}y) \\ &\leq \lambda\kappa(\lambda^{-1}x) + (1-\lambda)\kappa((1-\lambda)^{-1}y) \\ &= \lambda^{1+\delta}\kappa(x) + (1-\lambda)^{1+\delta}\kappa(y) \quad (\text{by (10.2)}). \end{aligned}$$

$\lambda \uparrow 1$ として, $\kappa(x+y) \leq \kappa(x)$ を得, 最後に y を $\bar{\Omega}$ の点に極限移行して, 所要の不等式を得る. \square

さて $x \in \Omega$ に対して,

$$(10.3) \quad \langle I(x), v \rangle := -D_v \log \kappa(x) \quad (v \in V)$$

とおく. 定義により, $I(E) = \omega_0$ であることに注意.

命題 10.5. $x \in \Omega$ のとき, $I(x) \in \Omega^*$ である. 特に $x = E$ において, 定理 10.1 が成り立つ.

証明. $x \in \Omega, y \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}$ とする. 閉区間 $[0, 1]$ 上の函数 $f(t) := \log \kappa(x + ty)$ の $t = 0$ における Taylor 展開を考えて $t = 1$ とおくと

$$\log \kappa(x + y) = \log \kappa(x) - \langle I(x), y \rangle + \frac{1}{2} D_y^2 \log \kappa(x + \theta y) \quad (0 < \theta < 1).$$

ここで, $D_y^2 \log \kappa(x + \theta y) = \partial_y \bar{\partial}_y \log K((0, i(x + \theta y)), (0, i(x + \theta y))) > 0$ であるから,

$$\langle I(x), y \rangle - \log \frac{\kappa(x)}{\kappa(x + y)} > 0.$$

ゆえに補題 10.4 より $\langle I(x), y \rangle > \log \frac{\kappa(x)}{\kappa(x + y)} \geq 0$ となって証明が終わる. \square

定義. $\omega \in \mathfrak{h}^*$ を次式で定義する:

$$\langle \omega, T + Y_b + X_a \rangle := \langle \omega_0, a \rangle \quad (T \in \mathfrak{h}_0, b \in U, a \in V)$$

以下この ω が認容線駅形式であることを示そう.

補題 10.6. $v_1, v_2 \in V$ のとき,

$$\langle \omega, [JX_{v_1}, X_{v_2}] \rangle = D_{v_1} D_{v_2} \log \kappa(E) = \partial_{v_1} \bar{\partial}_{v_2} \log K((0, iE), (0, iE)).$$

証明. $v_1 = v_2 = v$ のときに証明すればよい. $I(x)$ ($x \in \Omega$) は (10.3) で定義したものとす. $h_0 \in H_0$ のとき, $\kappa(\rho(h_0)x) = \chi(h_0)^{-1} \kappa(x)$ であるから

$$(10.4) \quad \begin{aligned} \langle I(\rho(h_0)x), v \rangle &= -\frac{d}{dt} \log \kappa(\rho(h_0)x + tv) \Big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} \log \kappa(x + t\rho(h_0)^{-1}v) \Big|_{t=0} \\ &= \langle I(x), \rho(h_0)^{-1}v \rangle. \end{aligned}$$

さて, $v \in V$ のとき, $JX_v = \zeta_0(v) \in \mathfrak{h}_0$ より

$$\rho(\exp tJX_v)E = E + t\rho_*(\zeta_0(v))E + O(t^2) = E + tv + O(t^2).$$

ゆえに

$$\begin{aligned} D_v^2 \log \kappa(E) &= -\frac{d}{dt} \langle I(E + tv), v \rangle \Big|_{t=0} = -\frac{d}{dt} \langle I(\rho(\exp t JX_v)E), v \rangle \Big|_{t=0} \\ &\stackrel{(10.4)}{=} -\frac{d}{dt} \langle I(E), \rho(\exp(-t) JX_v)v \rangle \Big|_{t=0} = \langle \omega_0, \rho_*(JX_v)v \rangle \\ &= \langle \omega, [JX_v, X_v] \rangle \quad (\because X_{\rho_*(JX_v)v} = [JX_v, X_v]) \end{aligned}$$

となって証明が終わる. □

定理 10.7. (1) $X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ のとき, $\langle \omega, [JX, X] \rangle > 0$.

(2) $X \in \mathfrak{h}$ のとき, $\langle \omega, [JX, JY] \rangle = \langle \omega, [X, Y] \rangle$.

証明. (i) $T \in \mathfrak{h}_0 \setminus \{0\}$ のとき. $JT = -X_{\rho_*(T)E}$ より $[JT, T] = [T, X_{\rho_*(T)E}]$ であり, $JX_{\rho_*(T)E} = \zeta_0(\rho_*(T)E) = T$ より

$$\langle \omega, [JT, T] \rangle = \langle \omega, [JX_v, X_v] \rangle \quad (v := \rho_*(T)E).$$

$T \neq 0$ より $v \neq 0$ であるから, 補題 10.6 より, 右辺は正である.

(ii) $b \in U \setminus \{0\}$ のとき. $JY_b = Y_{ib}$ ゆえ

$$[JY_b, Y_b] = [Y_{ib}, Y_b] = X_{4\text{Im}Q(ib,b)} = 4X_{Q(b,b)}.$$

$\omega_0 \in \Omega^*$ であり, $Q(b,b) \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}$ であるから

$$\langle \omega, [JY_b, Y_b] \rangle = 4\langle \omega, X_{Q(b,b)} \rangle = 4\langle \omega_0, Q(b,b) \rangle > 0.$$

(iii) $a \in V \setminus \{0\}$ のとき. 補題 10.6 より $\langle \omega, [JX_a, X_a] \rangle > 0$.

(iv) 一般に $X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ を $X = X_0 + X_{\frac{1}{2}} + X_1$ ($X_j \in \mathfrak{h}_j$) と表すとき,

$$[JX, X] \in [JX_0, X_0] + [JX_{\frac{1}{2}}, X_{\frac{1}{2}}] + [JX_1, X_1] + \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_{\frac{1}{2}}$$

であるから,

$$\langle \omega, [Jx, x] \rangle = \langle \omega_0, [Jx_0, x_0] \rangle + \langle \omega_0, [Jx_{1/2}, x_{1/2}] \rangle + \langle \omega_0, [Jx_1, x_1] \rangle > 0.$$

(2) まず, 次の補題が必要である.

補題 10.8. (1) $X, Y \in \mathfrak{h}_0$ のとき, $\langle \omega, J[X, Y] \rangle = 0$.

(2) $X, Y \in \mathfrak{h}_0$ のとき, $\langle \omega, [JX, Y] \rangle = \langle \omega, [JY, X] \rangle$.

証明. (1) $T := [X, Y] \in [\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0] \subset \mathfrak{h}_0$ とおく. $JT = -X_{\rho_*(T)E}$ より,

$$\begin{aligned} \langle \omega, JT \rangle &= -\langle \omega_0, \rho_*(T)E \rangle = \frac{d}{dt} \log \kappa(E + t\rho_*(T)E) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \log \kappa((I + t\rho_*(T))E) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \log \kappa(\rho(\exp tT)E) \Big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} \log \chi(\exp tT) \Big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} (2 \log(\det \rho(\exp tT)) + \log(\det_{U_{\mathbb{R}}} \mu(\exp tT))) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

ただし $\mu(h_{A,B}) = B$ である. ここで,

$$\log \det \rho(\exp tT) = \log \det \exp(t\rho_*(T)) = \log \exp t \operatorname{tr}(\rho_*(T)) = t \operatorname{tr}(\rho_*(T))$$

と, $T \in [\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0]$ より $\operatorname{tr} \rho_*(T) = 0$ とから (μ に関しても同様)

$$\langle \omega, JT \rangle = 2 \operatorname{tr}(\rho^*(T)) + \operatorname{tr}_{U_{\mathbb{R}}}(\mu^*(T)) = 0.$$

(2) 補題 9.3 の可積分条件より

$$J[JX, JY] = J[X, Y] - [JX, Y] - [X, JY].$$

ここで, $[JX, JY] \in [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] = \{0\}$, かつ (1) より $\langle \omega, J[X, Y] \rangle = 0$. ゆえに

$$\langle \omega, [JX, Y] \rangle + \langle \omega, [X, JY] \rangle = 0.$$

これより直ちに (2) が従う. □

定理 10.7 (2) の証明を続けよう.

(i) $X \in \mathfrak{h}_1, Y \in \mathfrak{h}_0$ のとき. $Z \in \mathfrak{h}_0$ をとって, $X = JZ$ とできるので,

$$\begin{aligned} \langle \omega, [JX, JY] \rangle &= -\langle \omega, [Z, JY] \rangle = -\langle \omega, [Y, JZ] \rangle \quad (\text{by 補題 10.8(2)}) \\ &= -\langle \omega, [Y, X] \rangle = \langle \omega, [X, Y] \rangle. \end{aligned}$$

(ii) $x \in U, y \in U$ のとき. $[Y_x, Y_y] = X_{4\operatorname{Im}Q(x,y)}$ より, $[JY_x, Y_y] = [Y_{ix}, Y_y] = X_{4\operatorname{Re}Q(x,y)}$. ここで, $V \ni v \mapsto X_v \in \mathfrak{h}_1$ の対応を複素線型で $W = V_{\mathbb{C}}$ と $(\mathfrak{h}_1)_{\mathbb{C}}$ の対応まで拡張しておく

$$X_{Q(x,y)} = \frac{1}{4}([JY_x, Y_y] + i[Y_x, Y_y]).$$

従ってまた

$$X_{Q(ix,iy)} = \frac{1}{4}(-[Y_x, JY_y] + i[JY_x, JY_y]).$$

$Q(ix, iy) = Q(x, y)$ であるから, 上の 2 個の式の右辺の虚部を比べて, $[JY_x, JY_y] = [Y_x, Y_y]$ を得る. ゆえに $\langle \omega, [JY_x, JY_y] \rangle = \langle \omega, [Y_x, Y_y] \rangle$.

(i) と (ii) (あるいは $[\cdot, \cdot]$ の歪対称性でそれに帰着される場合) 以外は $\langle \omega, [JX, JY] \rangle = 0 = \langle \omega, [X, Y] \rangle$ となって, 証明すべき式が成立している. \square

系 10.9. $\langle X | Y \rangle_\omega := \langle \omega, [JX, Y] \rangle$ は \mathfrak{h} に J 不変な内積を定める.

証明. 定理 10.7 (2) より, $\langle Y | X \rangle_\omega = \langle \omega, [JY, X] \rangle = -\langle \omega, [Y, JX] \rangle = \langle X | Y \rangle_\omega$ となるから, $\langle X | Y \rangle_\omega$ は対称な双線型形式である. 正定値であることは定理 10.7 (1) が保証する. そして

$$\langle JX | JY \rangle_\omega = -\langle \omega, [X, JY] \rangle = \langle \omega, [JY, X] \rangle = \langle Y | X \rangle_\omega = \langle X | Y \rangle_\omega.$$

ゆえに $\langle x | y \rangle_\omega$ は J 不変な内積である. \square

これまでの結果をまとめると:

定理 10.10. \mathfrak{h} は正規 j 代数 (Piatetski-Shapiro 代数) の構造を持つ:

- (1) \mathfrak{h} は分裂型可解 Lie 代数 (下三角行列で実現できる).
- (2) $J^2 = -I$ となる \mathfrak{h} 上の線型写像 J と $\omega \in \mathfrak{h}^*$ が存在して,
 - (i) $[JX, JY] = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY]$,
 - (ii) $\langle X | Y \rangle_\omega := \langle \omega, [JX, Y] \rangle$ は \mathfrak{h} に内積を定める.

§11. 正規 j 代数からの等質 Siegel 領域の構成

前回までの復習: D : 等質 Siegel 領域

$\implies \exists H \subset \text{Aff}(D)$ s.t. H は D に単純推移的に作用する

\implies 正規 j 代数 $(\mathfrak{h}, J, \omega)$.

(1) $\mathfrak{h} := \text{Lie}(H)$ は分裂可解 Lie 代数.

(2) $J \in \mathcal{L}(\mathfrak{h})$ ($J^2 = -\text{Id}$), $\omega \in \mathfrak{h}^*$ s.t.

(a) $[Jx, Jy] = [x, y] + J[Jx, y] + J[x, Jy]$ (可積分条件),

(b) $\langle x | y \rangle_\omega := \langle \omega, [Jx, y] \rangle$ は \mathfrak{h} に J 不変な内積を与える.

以下では, 逆に正規 j 代数 $(\mathfrak{h}, J, \omega)$ から出発して, $H := \exp \mathfrak{h}$ がアフィン変換として単純推移的に作用する等質 Siegel 領域を定義しよう.

(1) Lie 代数 \mathfrak{h} の構造:

$\mathfrak{n} := [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \text{span}\{[x, y]; x \in \mathfrak{h}, y \in \mathfrak{h}\}$ を \mathfrak{h} の導来イデアルとする. \mathfrak{n} はべき零 Lie 代数になる. 内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_\omega$ に関する \mathfrak{n} の直交補空間を \mathfrak{a} とする: $\mathfrak{a} := \mathfrak{n}^\perp$. このとき, 部分空間の直交直和として, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$. ここで, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{n}$ に注意する.

(i) \mathfrak{a} は可換な Lie 代数になり, \mathfrak{n} に随伴作用 $\mathfrak{a} \times \mathfrak{n} \ni (a, x) \mapsto [a, x] \in \mathfrak{n}$ で作用する. この作用は対角化可能である. すなわち, $\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$ に対して,

$$\mathfrak{n}_\alpha := \{x \in \mathfrak{n}; [a, x] = \langle \alpha, a \rangle x \quad (\forall a \in \mathfrak{a})\}$$

とおくとき, $\mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$ の有限部分集合 Δ が存在して, $\mathfrak{n}_\alpha \neq \{0\} \iff \alpha \in \Delta$ かつ

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{n}_\alpha.$$

Δ の元のことを, 正規 j 代数 $(\mathfrak{h}, J, \omega)$ のルートと呼ぶ.

(ii) $J\mathfrak{n}_\alpha \subset \mathfrak{a}$ となるルート α を, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ とする. このとき, $\dim \mathfrak{n}_{\alpha_k} = 1$ ($k = 1, \dots, r$) であり, $r = \dim \mathfrak{a}$ である. この r を正規 j 代数の階数と呼ぶ. さらに, 必要ならば, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ の番号をつけかえることによって, Δ は次の形の元からなるようにできる (ここで可能なすべてが起きるとは限らない):

$$\begin{aligned} \alpha_k \quad (k = 1, \dots, r), & \quad \frac{1}{2}(\alpha_m + \alpha_k) \quad (1 \leq k < m \leq r) \\ \frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_k) \quad (1 \leq k < m \leq r), & \quad \frac{1}{2}\alpha_k \quad (k = 1, \dots, r). \end{aligned}$$

(iii) 線型作用素 J は次の性質を持つ:

$$\begin{aligned} J\left(\sum_{k=1}^r \mathfrak{n}_{\alpha_k}\right) &= \mathfrak{a}, & J\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_m + \alpha_k)} &= \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_k)} \quad (1 \leq k < m \leq r), \\ J\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_k} &= \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_k} \quad (k = 1, \dots, r). \end{aligned}$$

(iv) 各 $k = 1, \dots, r$ について, $0 \neq E_k \in \mathfrak{n}_{\alpha_k}$ を選んで, $H_k := JE_k$ とおくと, $[H_k, E_l] = \delta_{kl}E_l$ をみたすようにできる. このとき, H_1, \dots, H_r は \mathfrak{a} の基底をなして, $\alpha_k(H_l) = \delta_{kl}$ をみたす.

(v) 以下次のように置く:

$$\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{a} + \sum_{1 \leq k < m \leq r} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_k)}, \quad \mathfrak{h}_{\frac{1}{2}} := \sum_{k=1}^r \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_k}, \quad \mathfrak{h}_1 := \sum_{1 \leq k \leq m \leq r} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_m + \alpha_k)}.$$

このとき

$$(11.1) \quad [\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j] \subset \mathfrak{h}_{i+j} \quad (\text{ただし } \mathfrak{h}_l = \{0\} \text{ for } l \neq 0, \frac{1}{2}, 1 \text{ とする}).$$

これより特に \mathfrak{h}_0 は部分 Lie 代数, \mathfrak{h}_1 は可換な部分 Lie 代数をなしている. また, $\mathfrak{n}_Q := \mathfrak{h}_{\frac{1}{2}} + \mathfrak{h}_1$ は³⁰べき零な部分 Lie 代数 (2-step) になっている:

$$[\mathfrak{n}_Q, \mathfrak{n}_Q] \subset \mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{n}_Q, \quad \text{ゆえに } [\mathfrak{n}_Q, [\mathfrak{n}_Q, \mathfrak{n}_Q]] \subset [\mathfrak{h}_{\frac{1}{2}} + \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] = \{0\}.$$

³⁰まだ Q は定義していないが前節までの記号と整合的にしている.

(2) 開凸錐の定義：

以下 $V := \mathfrak{h}_1$ とおく. $E := E_1 + \cdots + E_r$ とおくと, $E \in V$ である. \mathfrak{h} を Lie 代数とする単連結で連結な Lie 群を H とする. \mathfrak{h} は分裂可解 Lie 代数なので, 指数写像 \exp は, \mathfrak{h} から H の上への微分同相になっている. \mathfrak{h}_0 は \mathfrak{h} の部分 Lie 代数なので, \mathfrak{h}_0 に対応する H の Lie 部分群を H_0 とする. $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1] \subset \mathfrak{h}_1$, すなわち $(\text{ad } \mathfrak{h}_0)V \subset V$ であるから,

$$(\text{Ad } H_0)V = (\text{Ad } \exp \mathfrak{h}_0)V = (\exp \text{ad } \mathfrak{h}_0)V \subset V$$

となる. これにより, H_0 は V に線型に作用する: $h \cdot x := (\text{Ad } h)x$. ここで $\Omega := H_0 \cdot E$ (E を通る H_0 軌道) とおく. そうすると Ω は regular な開凸錐であることが証明できる. 以下その粗筋を示そう.

(i) Ω が錐になっていること：

$a_0 := H_1 + \cdots + H_r \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_0$ とおくと, $j = 0, \frac{1}{2}, 1$ に対して, \mathfrak{h}_j は $\text{ad } a_0$ の j 固有空間になっている (これが (11.1) が成り立つ理由である). そうすると, $x \in V = \mathfrak{h}_1$, $t \in \mathbb{R}$ のとき,

$$(\text{Ad } \exp t a_0)x = (\exp t \text{ad } a_0)x = e^t x.$$

これより $x \in \Omega$, $\lambda > 0$ ならば, $t = \exp \lambda$ とおくと, $\lambda x = (\text{Ad } \exp t a_0)x \in \Omega$ がわかる.

(ii) 開集合であること：

まず, $X \in \mathfrak{h}_0$ のとき, $JX = -[X, E]$ が示せる. このことは軌道写像 $\alpha : H_0 \ni h \mapsto hE \in \Omega$ の単位元における微分 $\alpha_* : \mathfrak{h}_0 \ni X \mapsto [X, E] \in V$ が $-J$ に等しく, 従って線型同型写像であることを示している. これより $E \in \Omega$ は内点. 等質性から各 $x \in \Omega$ が内点になって, Ω は開集合である.

(iii) 軌道写像 $\alpha : H_0 \ni h \mapsto hE$ が微分同相であること：

まず $\text{Stab}_E H_0$ が連結であることを示そう. $h \in \text{Stab}_E H_0$ とし, $h = \exp X$ ($X \in \mathfrak{h}_0$) と表すと, $(\exp X) \cdot E = E$ である.

$$P := \{t \in \mathbb{R} ; (\exp tX) \cdot E = E\}$$

とおくと, P は加法群 \mathbb{R} の閉部分群で, $P \neq \{0\}$ である. $P \neq \mathbb{R}$ とすると, R は正の最小元 t_0 をもつ. このとき, $v := (\exp \frac{1}{2} t_0 X) \cdot E - E \neq 0$ とおくと

$$(\exp \frac{1}{2} t_0 X) \cdot v = E - (\exp \frac{1}{2} t_0 X) \cdot E = -v.$$

これは v が $\exp \frac{1}{2}t_0X$ の -1 固有ベクトルであることを示している。よって、 $\frac{1}{2}t_0X$ の V への作用は $in\pi$ ($n \in \mathbb{Z}^\times$) という純虚の固有値を持つことになり、 \mathfrak{h} が分裂可解であることに反する。よって $P = \mathbb{R}$ であり、 $X \in \text{Lie}(\text{Stab}_E H_0)$ となる。ゆえに $h = \exp X$ は $\text{Stab}_E H_0$ の単位元の連結成分に入っていることになり、 $\text{Stab}_E H_0$ は連結である。さて $\dim \mathfrak{h}_0 = \dim \mathfrak{h}_1$ であることから、 $\dim \text{Stab}_E H_0 \geq 1$ はあり得ない。ゆえに $\text{Stab}_E H_0$ は単位元のみである。

(iv) $\xi_0 := \omega|_V$ とおくと、任意の $y \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して、 $\langle \xi_0, y \rangle > 0$ であること：まず次の (a), (b) に注意する：

(a) $\langle \xi_0, E_k \rangle > 0$ ($j = k, \dots, r$).

なぜなら、 $[JE_k, E_k] = E_k$ より、 $\langle \xi_0, E_k \rangle = \langle \xi_0, [JE_k, E_k] \rangle = \|E_k\|_\omega^2 > 0$.

(b) $\alpha \in \Delta$ で $\alpha \neq \alpha_k$ ($k = 1, \dots, r$) ならば、 ω は \mathfrak{n}_α 上で 0 である。(証明略)

(iv) の証明は次のような手続きである。かなり明示的な計算と (a), (b) より、

$$\langle \omega, h \cdot E \rangle > 0 \quad (\forall h \in H_0)$$

が示される。一方、 H_0 は V^* に随伴作用の反傾で作用する：

$$\langle h \cdot \xi, v \rangle := \langle \xi, h^{-1} \cdot v \rangle \quad (h \in H_0, \xi \in V^*, v \in V).$$

このとき、任意の $x = h_0 E \in \Omega$ に対して

$$\langle h \cdot \xi_0, x \rangle = \langle \xi_0, h^{-1} h_0 E \rangle = \langle \omega, h^{-1} h_0 E \rangle > 0 \quad (\forall h \in H_0).$$

極限移行をすれば、

$$(11.2) \quad \langle h \cdot \xi_0, y \rangle \geq 0 \quad (\forall y \in \bar{\Omega}).$$

さらに軌道 $H_0 \cdot \xi_0$ は開集合である。なぜなら、軌道写像 $\tilde{\alpha} : H_0 \ni h \mapsto h \cdot \xi_0 \in V^*$ の単位元における微分 $\tilde{\alpha}_* : \mathfrak{h}_0 \ni X \mapsto X \cdot \xi_0 \in V^*$ は、次に示すように、線型同型であるから (ii) と同じ議論になる：実際 $X \cdot \xi_0 = 0$ とすると

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X \cdot \xi_0, JX \rangle = \frac{d}{dt} \langle (\exp tX) \cdot \xi_0, JX \rangle \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \langle \xi_0, (\exp(-tX)) \cdot JX \rangle \Big|_{t=0} \\ &= -\langle \xi_0, [X, JX] \rangle = \langle \omega, [JX, X] \rangle = \|X\|_\omega^2 \end{aligned}$$

より $X = 0$ となる。さて、 $y \in \bar{\Omega} \setminus \{0\}$ のとき、線型写像 $V^* \ni \xi \mapsto \langle \xi, y \rangle \in \mathbb{R}$ は開写像である。従って、開集合 $H_0 \cdot \xi_0$ の像 $\langle H_0 \cdot \xi_0, y \rangle$ は、(11.2) より、閉区間 $[0, \infty)$ に含まれる \mathbb{R} の開集合ということになるので、 $\langle H_0 \cdot \xi_0, y \rangle \subset (0, \infty)$ 。とくに

$$\langle \omega, y \rangle = \langle \xi_0, y \rangle > 0.$$

(v) Ω は凸集合である :

次の集合を導入する :

$$\begin{aligned}(H_0 \cdot \xi_0)^\dagger &:= \{x \in V ; \langle \xi, x \rangle > 0 \quad (\forall \xi \in (\overline{H_0 \cdot \xi_0}) \setminus \{0\})\}, \\ \Omega^\dagger &:= \{\xi \in V^* ; \langle \xi, y \rangle > 0 \quad (\forall y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})\}, \\ \Omega^{\dagger\dagger} &:= \{y \in V ; \langle \xi, y \rangle > 0 \quad (\forall \xi \in \overline{\Omega^\dagger} \setminus \{0\})\}.\end{aligned}$$

$H_0 \cdot \xi_0$ や Ω の凸性がまだ保証されていないので, * を用いずに \dagger を用いている. $(H_0 \cdot \xi_0)^\dagger$ が凸集合であることは明らかゆえ, 以下では $\Omega = (H_0 \cdot \xi_0)^\dagger$ を示すことで, Ω の凸性が示される. また (iv) では, $\xi_0 \in \Omega^\dagger$ を示したことになっていて, Ω^\dagger が H_0 不変集合であるから, $H_0 \cdot \xi_0 \subset \Omega^\dagger$ でもある. 次の補題から, $\Omega \subset \Omega^{\dagger\dagger}$ がわかるので, $(H_0 \cdot \xi_0)^\dagger \supset \Omega^{\dagger\dagger} \supset \Omega$ となっている.

補題 11.1. 次の3個の集合 A, B, C はいずれも $\overline{\Omega^\dagger}$ に等しい.

- (1) $A := \{\lambda \in V^* ; \langle \lambda, x \rangle > 0 \quad (\forall x \in \Omega)\} \cup \{0\}$.
- (2) $B := \{\lambda \in V^* ; \langle \lambda, x \rangle \geq 0 \quad (\forall x \in \Omega)\}$.
- (3) $C := \{\lambda \in V^* ; \langle \lambda, x \rangle > 0 \quad (\forall x \in \overline{\Omega})\}$.

証明. $A \subset B = C$ と $\overline{\Omega^\dagger} \subset C$ は明らかであろう. $\lambda \in B$ かつ $\lambda \neq 0$ であれば, $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$ は開写像だから, Ω の像 $\lambda(\Omega)$ は $[0, \infty)$ に含まれる \mathbb{R} の開集合. ゆえに $\lambda(\Omega) \subset (0, \infty)$. ゆえに $B \subset A$ となって, $A = B = C$ が示せた. さて $\lambda \in C$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ と $y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ に対して

$$\langle \lambda + \varepsilon \xi_0, y \rangle = \langle \lambda, y \rangle + \varepsilon \langle \xi_0, y \rangle > 0.$$

ゆえに $\lambda + \varepsilon \xi_0 \in \Omega^\dagger$. よって, $\lambda = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\lambda + \varepsilon \xi_0) \in \overline{\Omega^\dagger}$ となって, 証明が終わる. \square

$(H_0 \cdot \xi_0)^\dagger = \Omega$ の証明のために次の函数 $N(x)$ を導入する :

$$N(x) := \int_{H_0 \cdot \xi_0} e^{-\langle \xi, x \rangle} d\xi \quad (x \in V).$$

$0 < N(x) \leq \infty$ であり, $x \in (H_0 \cdot \xi_0)^\dagger$ ならば $N(x)$ は有限値である. また $\log N(x)$ は凸函数である.

$$\Omega \ni x \rightarrow x_0 \in \partial \Omega \quad \text{のとき} \quad N(x) \rightarrow \infty$$

が示せるので (証明略), $(H_0 \cdot \xi_0)^\dagger \setminus \Omega = \emptyset$ となって証明終わり.

(vi) $\Omega^* = H_0 \cdot \xi_0$ (証明略).

(3) Siegel 領域の定義 :

$\mathfrak{h}_{\frac{1}{2}}$ は J で不変なので, それによって複素ベクトル空間とみたものを U で表す. 実双線型写像 $Q : U \times U \rightarrow W$ を次で定義する :

$$Q(u, u') := \frac{1}{4}([Ju, u'] + i[u, u']) \quad (u, u' \in U).$$

この Q が sesqui-linear で Hermitian Ω -positive であることを示すのに, 次の補題が必要である.

補題 11.2. (1) $X \in \mathfrak{h}_0, u \in \mathfrak{h}_{\frac{1}{2}}$ のとき, $J[X, u] = [X, Ju]$.

(2) $u, u' \in \mathfrak{h}_{\frac{1}{2}}$ のとき, $[Ju, Ju'] = [u, u']$.

証明. (1) 可積分条件

$$[JX, Ju] = [X, u] + J[JX, u] + J[X, Ju]$$

において, $[JX, Ju] \in [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_{\frac{1}{2}}] = \{0\}$. 同様に $[JX, u] = 0$. ゆえに $J[X, u] = [X, Ju]$ が出る.

(2) 同様に可積分条件

$$[Ju, Ju'] = [u, u'] + J[Ju, u'] + J[u, Ju']$$

において, $[Ju, Ju'] \in \mathfrak{h}_1, [u, u'] \in \mathfrak{h}_1, J[Ju, u'] \in \mathfrak{h}_0, J[u, Ju'] \in \mathfrak{h}_0$ であるから, \mathfrak{h}_1 部分を比べて, 所要の等式を得る. \square

補題 11.1 (1) は, \mathfrak{h}_0 の $\mathfrak{h}_{\frac{1}{2}}$ への随伴作用が J と可換, すなわち, $X \in \mathfrak{h}_0$ のとき, $\text{ad } X|_U$ が, 従って $h \in H_0$ のときの $\text{Ad } h|_U$ が, U 上の複素線型変換であることを示している. さらに H_0 の V への随伴作用を, V の複素化 W まで自然に拡張しておく: $h \cdot (v + iv') := h \cdot v + i h \cdot v' (h \in H_0, v, v' \in V)$.

(1) Q は Hermitian sesquilinear であること :

定義より

$$Q(Ju, u') = \frac{1}{4}(-[u, u'] + i[Ju, u']) = \frac{i}{4}([Ju, u'] + i[u, u']) = iQ(u, u').$$

そして補題 11.2(2) より

$$Q(u', u) = \frac{1}{4}([Ju', u] + i[u', u]) = \frac{1}{4}([Ju, u'] - i[u, u']) = Q(u, u')^*.$$

(2) $Q(h \cdot u, h \cdot u') = h \cdot (Q(u, u'))$ ($h \in H_0, u, u' \in \mathfrak{h}_{\frac{1}{2}}$) であること³¹.

定義と補題 11.2(1) から

$$\begin{aligned} Q(h \cdot u, h \cdot u') &= \frac{1}{4}([\text{Ad } h]Ju, (\text{Ad } h)u'] + i[\text{Ad } h]u, (\text{Ad } h)u'] \\ &= \frac{1}{4}(\text{Ad } h)([Ju, u'] + i[u, u']) = h \cdot (Q(u, u')). \end{aligned}$$

(3) Q が Ω -positive であること.

まず, $\xi_0 := \omega|_V$ を上の通りとすると, 任意の $u \in U \setminus \{0\}$ に対して

$$\langle \xi_0, Q(u, u) \rangle = \frac{1}{4} \langle \omega_0, [Ju, u] \rangle > 0.$$

従って, 任意の $\xi \in H_0 \cdot \xi_0 = \Omega^*$ に対して, (2) より $\langle \xi, Q(u, u) \rangle > 0$. ゆえに

$$Q(u, u) \in \overline{\Omega^{**}} = \overline{\Omega}, \quad \text{and} \quad Q(u, u) \neq 0.$$

以上より, Siegel 領域

$$D = D(\Omega, Q) = \{(u, w) \in U \times W; \text{Im } w - Q(u, u) \in \Omega\}$$

が定義できる. $U = (\mathfrak{h}_{\frac{1}{2}}, J)$, $V = \mathfrak{h}_1$, $W = V_{\mathbb{C}}$ であったことを思い出しておこう.

$N_Q := \exp \mathfrak{n}_Q$ とおく. $H = N_Q \times H_0$ である. H_0 が Ω に単純推移的に作用していることを思い出しておこう. $H_0 \subset \text{Aff}(D)$ は明らかであろう. 実際複素線型で作用している. 次に, $x, x' \in \mathfrak{h}_1$ で, $u, u' \in \mathfrak{h}_{\frac{1}{2}}$ のとき

$$[x + u, x' + u'] = [u, u'] = 4 \text{Im } Q(u, u')$$

となっていることに注意. 従って, $N_Q = \exp \mathfrak{n}_Q$ の群演算は, $n(a, b) := \exp(b + a)$ ($a \in V, b \in U$) とおくと, Campbell–Hausdorff 公式から

$$n(a, b)n(a', b') = n(a + a' + 2 \text{Im } Q(b, b'), b + b').$$

従って, N_Q の D への作用を, §6 の様に,

$$n(a, b) \cdot (u, w) := (u + b, w + a + iQ(b, b) + 2iQ(u, b))$$

で定義すると, これは確かに準同型 $N_Q \rightarrow \text{Aff}(D)$ を与えている. 以上で準同型 $H \rightarrow \text{Aff}(D)$ を得たことになる. 作用が単純推移的なことは, $n(a, b) \in N_Q, h \in H_0$ のとき,

$$n(a, b)h \cdot (0, iE) = n(a, b) \cdot (0, ih \cdot E) = (b, a + i(h \cdot E + Q(b, b)))$$

³¹前節までの記号で, $\text{Ad } H_0|_{U \oplus W} \subset H_Q$ を示している.

よりわかる.

§12. 等質チューブ領域の Cayley 変換

V を有限次元実ベクトル空間とし, Ω を V に含まれる regular な等質開凸錐とする. $G(\Omega)$ を Ω の線型同型群とする. $G(\Omega)$ の三角型部分群 H_0 で, Ω に単純推移的に働くものがある. ここでは, 前節の正規 j 代数のシチュエーションにあるとしてよい. すなわち, $(\mathfrak{h}, J, \omega)$ を正規 j 代数とし, 前節の記号を踏襲すると, H_0 はその Lie 代数が \mathfrak{h}_0 となっているもので, $A = \exp \mathfrak{a}$ であり, $\mathfrak{n}_0 = \text{Lie}(N_0)$ は, $\frac{1}{2}(\alpha_k - \alpha_j)$ ($j < k$) の形のルートに対応するルート空間の和である. H_0 はべき零部分群 N_0 と可換部分群 A の半直積で表される: $H_0 = N_0 \rtimes A$. そして $r := \dim \mathfrak{a}$ とおく (r は Ω の階数と呼ばれる). 各 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$ に対して $\alpha_{\mathbf{s}} \in \mathfrak{a}^*$ を次で定義する:

$$\alpha_{\mathbf{s}} := s_1 \alpha_1 + \cdots + s_r \alpha_r.$$

A は可換なので, $\chi_{\mathbf{s}}(\exp a) := \exp \langle \alpha_{\mathbf{s}}, a \rangle$ ($a \in \mathfrak{a}$) は A の 1 次元表現 (すなわち, A から正の実数がなす乗法群への群準同型) を定義する. さらに $H_0 = N_0 \rtimes A$ は半直積なので, N_0 上 trivial として, $\chi_{\mathbf{s}}$ は H_0 の 1 次元表現に拡張される: $\chi_{\mathbf{s}}(na) := \chi_{\mathbf{s}}(a)$ ($n \in N_0, a \in A$). 実際, $n, n' \in N_0, a, a' \in A$ のとき, $(na)(n'a') = (nan'a^{-1})(aa')$ で, $an'a^{-1} \in N_0$ より

$$\chi_{\mathbf{s}}((na)(n'a')) = \chi_{\mathbf{s}}(aa') = \chi_{\mathbf{s}}(a)\chi_{\mathbf{s}}(a') = \chi_{\mathbf{s}}(na)\chi_{\mathbf{s}}(n'a').$$

以下 $E \in \Omega$ を固定する. 軌道写像 $H_0 \ni h \rightarrow h \cdot E \in \Omega$ は微分同相であるから, Ω 上の関数 $\Delta_{\mathbf{s}}$ を, $\Delta_{\mathbf{s}}(h \cdot E) := \chi_{\mathbf{s}}(h)$ ($h \in H_0$) で定義する. この $\Delta_{\mathbf{s}}$ を複合べき乗関数と呼ぶ.

例 12.1. $V = \text{Sym}(2, \mathbb{R})$ とし, $\Omega := \{x \in V; x \gg 0\}$ とする. 各 $g \in GL(2, \mathbb{R})$ に対して, $\rho(g)x := gx^tg$ ($x \in V$) とおくと, $g \mapsto \rho(g)$ は $GL(2, \mathbb{R})$ から $G(\Omega)$ への群準同型になっていて, $\rho(GL(2, \mathbb{R}))$ は Ω に推移的に働いている. さらに次の $GL(2, \mathbb{R})$ の部分群 H_0 をとる:

$$H_0 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}; \begin{matrix} a > 0, d > 0 \\ c \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}.$$

このとき, $\rho(H_0)$ は Ω に単純推移的に働く. 実際, $x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \Omega$ が与えられたとき, $\rho(h)I_2 = h^t h = x$ となる $h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in H_0$ を求めることができる:

$$h^t h = \begin{pmatrix} a^2 & ac \\ ac & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

であるから, 連立方程式

$$\begin{cases} x_{11} = a^2 \\ x_{21} = ac \\ x_{22} = c^2 + d^2 \end{cases}$$

を得る. $x_{11} > 0, \det x > 0$ に注意して, これより容易に,

$$a = \sqrt{x_{11}}, \quad c = \frac{x_{21}}{\sqrt{x_{11}}}, \quad d = \frac{\sqrt{\det x}}{\sqrt{x_{11}}}.$$

一方, $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して, H_0 の 1 次元表現 $\chi_{\mathbf{s}}$ を $\chi_{\mathbf{s}}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^{2s_1} d^{2s_2}$ で定義する. このとき, 上記のように $x = h^t h$ とすると,

$$\Delta_{\mathbf{s}}(x) = \chi_{\mathbf{s}}(h) = x_{11}^{s_1} \left(\frac{\det x}{x_{11}}\right)^{s_2} = x_{11}^{s_1 - s_2} (\det x)^{s_2}$$

となる. 一般のサイズの $\text{Sym}(r, \mathbb{R})$ で考えると

$$\Delta_{\mathbf{s}}(x) = \Delta_1(x)^{s_1 - s_2} \cdots \Delta_{r-1}(x)^{s_{r-1} - s_r} \Delta_r(x)^{s_r}$$

となる. ただし, $x \in \Omega$ に対して, $\Delta_k(x)$ は, 行列 x の左上からとって k 番目の首座小行列式である. 特に $\Delta_r(x) = \det x$.

一般の場合に戻ろう. 複合べき乗関数に関しては次の定理がある.

定理 12.2 (Gindikin 1975, Ishi 2000). 任意の $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$ に対して, $\Delta_{\mathbf{s}}$ は $\Omega + iV$ 上の正則関数に解析接続される. その解析接続は, 双対凸錐 Ω^* , ただし

$$(12.1) \quad \Omega^* := \{\lambda \in V^*; \langle \lambda, y \rangle > 0 \quad (\forall y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})\},$$

の上の Riesz 超関数と呼ばれるある超関数の Laplace 変換で得られる.

さて, チューブ領域 $V + i\Omega$ の Cayley 変換を定義することを考えよう.

1 変数のとき: $D := \{w \in \mathbb{C}; \text{Im } w > 0\}$: 上半平面の場合.

$z = C(w) := \frac{w-i}{w+i}$. このとき, C は D を単位円の内部に写像する.

行列変数のとき: (Siegel 上半空間の場合, cf. §1)

$V := \text{Sym}(r, \mathbb{R}), \Omega := \{x \in V; x \gg 0\}$ とする. そして $V + i\Omega$ を Siegel 上半空間とする. $e := I_r$ を r 次単位行列として, 次の変換を考える:

$$(12.2) \quad z = C(w) = (w - ie)(w + ie)^{-1}.$$

このとき、像 $C(V + i\Omega)$ は次の Siegel disk と呼ばれる有界領域 \mathcal{D} である：

$$\mathcal{D} = \{z \in \text{Sym}(r, \mathbb{C}) ; e - zz^* \gg 0\}.$$

一般の管状領域に Cayley 変換を拡張しようとするとき、上で

$$(w - ie)(w + ie)^{-1} = e - 2i(w + ie)^{-1} = e - 2(e - iw)^{-1}$$

であるから、まず逆行列の一般化が必要である。そのあとは線型構造だけで話が済む。

補題 12.3. $x, v \in \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ かつ $x \gg 0$ のとき

$$\left. \frac{d}{dt} \log \det(x + tv) \right|_{t=0} = \text{tr}(x^{-1}v).$$

証明. $x + tv = x(e + tx^{-1}v)$ と書き直すことにより、

$$\left. \frac{d}{dt} \log \det(e + tv) \right|_{t=0} = \text{tr } v$$

を示せばよい。これは直交行列 k を用いて v を対角化して

$$v = k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix} k^{-1}$$

とすることより、 $\det(e + tv) = (1 + t\lambda_1) \cdots (1 + t\lambda_r)$ となることから

$$\log \det(e + tv) = \sum_{j=1}^r \log(1 + t\lambda_j)$$

となり、容易に結論の式が導かれる。 □

定義. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ が認容的であるとは、 $x \in \Omega$ が $x_0 \in \partial\Omega$ に近づくととき、 $\Delta_{\mathbf{s}}(x) \rightarrow 0$ となるときをいう。

例 12.1 で認容性について考えてみよう。 $\Delta_{\mathbf{s}}(x) = x_{11}^{s_1 - s_2} (\det x)^{s_2}$ であった。

補題 12.4. 例 12.1 で $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ が認容的であるための必要十分条件は、 $s_1 > 0$ かつ $s_2 > 0$ をみたすことである。

証明. 必要性： $\Delta_{\mathbf{s}}(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow x_0 \in \partial\Omega$) とする。 $\varepsilon > 0$ に対して

$$x_\varepsilon := \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_\varepsilon := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

とおくと、 $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in \Omega$ であって、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、 $x_\varepsilon \rightarrow E_{22} \in \partial\Omega$ 、 $y_\varepsilon \rightarrow E_{11} \in \partial\Omega$ 。ただし、 E_{ij} は (i, j) 行列単位。ゆえに $\varepsilon^{s_1} = \Delta_{\mathbf{s}}(x_\varepsilon) \rightarrow 0$ かつ $\varepsilon^{s_2} = \Delta_{\mathbf{s}}(y_\varepsilon) \rightarrow 0$ 。ゆえに $s_1 > 0$ かつ $s_2 > 0$ である。

逆に $s_1 > 0$ かつ $s_2 > 0$ とする. $x \in \Omega$ を $x = h^t h$ ($h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in H_0$) と表すとき, 例 12.1 より, $x_{11} = a^2$, $x_{22} = c^2 + d^2$ である. 従って, $x \rightarrow x_0 \in \partial\Omega$ のとき, a^2 と $c^2 + d^2$, 従って a と d は有界に留まる. $\Delta_s(x) = a^{2s_1} d^{2s_2}$ であつたから

$$\Delta_s(x) = \begin{cases} a^{2(s_1-s_2)}(\det x)^{s_2} & (\text{if } s_1 \geq s_2) \\ d^{2(s_2-s_1)}(\det x)^{s_1} & (\text{if } s_1 < s_2) \end{cases}$$

と書き直してみれば, $s_1 > 0$ かつ $s_2 > 0$ で $x \rightarrow x_0 \in \partial\Omega$ のとき, $\Delta_s(x) \rightarrow 0$ となることがわかる. \square

注意 12.5. 正規 j 代数 $(\mathfrak{h}, J, \Omega)$ のシチュエーションに戻る. 前節の $E_k \in \mathfrak{n}_{\alpha_k}$ を思い出しておいて, 各 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$ に対して, \mathfrak{h} 上の線型形式 E_s^* を次で定義する:

$$\langle E_s^*, E_k \rangle = s_k \quad (k = 1, \dots, r), \quad E_s^* = 0 \text{ on } \mathfrak{n}_\alpha \quad (\alpha \neq \alpha_k), \quad E_s^* = 0 \text{ on } \mathfrak{a}.$$

このとき, E_s^* が認容的, すなわち $\langle E_s^*, [Jx, y] \rangle$ が \mathfrak{h} に J 不変な内積を定義することと, \mathbf{s} が認容的であることとは同値である.

定義. $x \in \Omega$ に対して, $I_s(x) \in V^*$ を次式で定義する:

$$\langle I_s(x), v \rangle := -\frac{d}{dt} \log \Delta_{-s}(x + tv) \Big|_{t=0} \quad (v \in V).$$

• $\lambda > 0$ のとき, $I_s(\lambda x) = \lambda^{-1} I_s(x)$.

$\because h_\lambda \in H_0$ をとつて, $h_\lambda \cdot x = \lambda x$ とすると, $\Delta_{-s}(\lambda x) = \chi_{-s}(h_\lambda) \Delta_{-s}(x)$ であるから

$$\begin{aligned} \langle I_s(\lambda x), v \rangle &= -\frac{d}{dt} \log \Delta_{-s}(\lambda x + tv) \Big|_{t=0} = -\frac{d}{dt} \log \Delta_{-s}(x + t\lambda^{-1}v) \Big|_{t=0} \\ &= \langle I_s(x), \lambda^{-1}v \rangle = \langle \lambda^{-1} I_s(x), v \rangle. \quad // \end{aligned}$$

命題 12.6. Ω^* を Ω の双対凸錐 (12.1) とする.

- (1) $x \in \Omega$ のとき, $I_s(x) \in \Omega^*$ であつて, $I_s: \Omega \ni x \mapsto I_s(x) \in \Omega^*$ は全単射である.
- (2) $W := V_{\mathbb{C}}$ とし, W^* は W の双対空間とする. I_s は有理写像 (基底をとると, 各成分が有理関数で表される写像) $W \rightarrow W^*$ に解析接続される.
- (3) Ω^* と $E_s^* := I_s(E) \in \Omega^*$ から始めて写像 $I_s^*: \Omega^* \rightarrow \Omega^{**} = \Omega$ を作ると, それは I_s^{-1} に等しい. I_s^* も有理写像 $W^* \rightarrow W^{**} = W$ に解析接続される. 従つて, I_s は双有理写像である.
- (4) $I_s: \Omega + iV \rightarrow I_s(\Omega + iV)$ は双正則である.

注意 12.7. (1) 次で定義される函数 $\phi(x)$ ($x \in \Omega$) を Ω の特性函数という:

$$\phi(x) := \int_{\Omega^*} e^{-\langle \lambda, x \rangle} d\lambda.$$

適当に認容的 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$ をとると, $\phi = \text{const } \Delta_{-\mathbf{s}}$ となることが知られている. この $\Delta_{-\mathbf{s}}$ から定義される $I_{\mathbf{s}}$ は, Vinberg の $*$ 写像 $x \mapsto x^*$ である.

(2) 等質 Siegel 領域 D の Bergman 核 $\kappa(z_1, z_2)$ は, 定数 $c > 0$ と適当な認容的 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$ に対して

$$\kappa(z_1, z_2) = c \Delta_{-\mathbf{s}} \left(\frac{w_1 - w_2^*}{2i} - Q(u_1, u_2) \right)$$

となることがわかっている.

定理 12.8 (Kai–Nomura, 2005). $I_{\mathbf{s}}(\Omega + iV) = \Omega^* + iV^*$ となるための必要十分条件は, Ω が自己双対で $s_1 = \dots = s_r$ となることである. このとき, V は Euclid 型 Jordan 代数になり, Ω が自己双対となる V の内積をうまく正規化すると, $I_{\mathbf{s}}(z)$ は Jordan 代数での逆元 z^{-1} に等しい.

定義. $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^r$ を認容的とする.

$$C_{\mathbf{s}}(w) := I_{\mathbf{s}}(E) - 2I_{\mathbf{s}}(E - iw) \quad (w \in V + i\Omega).$$

$C_{\mathbf{s}}$ をチューブ領域 $V + i\Omega$ の **Cayley 変換** という.

定理 12.9. (1) $C_{\mathbf{s}}$ は $V + i\Omega$ 上で正則な双有理写像である. 逆写像も明示的に与えることができる.

(2) 像 $C_{\mathbf{s}}(V + i\Omega)$ は有界である.

§13. 等質 Siegel 領域の Cayley 変換

$(\mathfrak{h}, J, \omega)$ を正規 j 代数とする. そこから §11 の様にして Siegel 領域 D を構成する. 特に $V = \mathfrak{h}_1$ であり, Ω は点 $E := E_1 + \dots + E_r \in V$ の H 軌道として得られる regular な開凸錐とする. U は複素構造 J により $\mathfrak{h}_{\frac{1}{2}}$ を複素ベクトル空間と見たものであり, Ω -positive で sesqui-linear は Hermitian map Q は

$$Q(u, u') := \frac{1}{4}([Ju, u'] + i[u, u']) \quad (u, u' \in U)$$

であたえられるものとする. D の base point としては, $(0, iE)$ を選んでおく.

以下ではこの D の Cayley 変換を考える. Ω の階数を r とし, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ は認容的であるとする. このとき,

$$\langle x | y \rangle_{\mathbf{s}} := D_{v_1} D_{v_2} \log \Delta_{-\mathbf{s}}(E) \quad (x, y \in V)$$

は V に内積を定義する. ただし D_v は v 方向の微分で, $D_v f(x) = \frac{d}{dt} f(x + tv)|_{t=0}$ である. この内積を $W \times W$ 上の複素双線型形式に拡張する (記号はそのまま $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を使う). そうすると

$$(u_1 | u_2)_s := \langle E | Q(u_1, u_2) \rangle_s \quad (u_1, u_2 \in U)$$

は U にエルミート内積を定義する. 次に各 $w \in W$ に対して, U 上の複素線型作用素 $\varphi(w)$ を

$$(\varphi(w)u_1 | u_2)_s = \langle w | Q(u_1, u_2) \rangle_s \quad (u_1, u_2 \in U)$$

で定める. 明らかに $\varphi(E) = \text{Id}_U$ である. 本節では, 内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_s$ を用いて V^* と V を同一視し, 前節で導入した $I_s(x)$ ($x \in \Omega$) を V の中で捉えるものとする: すなわち $x \in \Omega$ に対して

$$\langle I_s(x) | v \rangle_s := -D_v \log \Delta_{-s}(x) \quad (v \in V).$$

Ω の双対凸錐も V で捉えて, Ω^s で表す:

$$\Omega^s := \{y \in V; \langle y | x \rangle_s > 0 \quad (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})\}.$$

このとき, $I_s(E) = E_s := s_1 E_1 + \cdots + s_r E_r$ が示されるので, チューブ領域 $V + i\Omega$ の Cayley 変換は次のようになる:

$$C_s(w) = E_s - 2I_s(E - iw) \quad (w \in V + i\Omega).$$

補題 13.1. $(u, w) \in D$ ならば, $w \in V + i\Omega$ である.

証明. $\text{Im } w \in Q(u, u) + \Omega$ であり, $Q(u, u) \in \overline{\Omega}$ ゆえ, $\text{Im } w \in \overline{\Omega} + \Omega \subset \Omega$. \square

この補題により, $(u, w) \in D$ ならば, $C_s(w)$ が定義できる.

定義. $\Phi_s(u, w) := (\varphi(I_s(E - iw))u, C_s(w)) \quad ((u, w) \in D).$

定理 13.2. (1) Φ_s は D 上で正則な双有理写像である. 逆写像も明示的に与えることができる.

(2) 像 $\Phi_s(D)$ は有界である.

定理 13.3 (Kai 2007). $\Phi_s(D)$ が凸集合 $\iff D$ が対称領域であつて, $s_1 = \cdots = s_r$.

例 13.4. 例 6.2 で扱った Siegel 領域でみてみよう. $V := \text{Sym}(2, \mathbb{R})$ とし, $\Omega := \{x \in V; x \gg 0\}$ とする. $W := V_{\mathbb{C}} = \text{Sym}(2, \mathbb{C})$ である. また, $U = \mathbb{C}^2$ とする.

$$Q(u, u') := \begin{pmatrix} u_1 \bar{u}'_1 & \frac{1}{2}(u_1 \bar{u}'_2 + u_2 \bar{u}'_1) \\ \frac{1}{2}(u_1 \bar{u}'_2 + u_2 \bar{u}'_1) & u_2 \bar{u}'_2 \end{pmatrix} \in W \quad (u = (u_1, u_2), u' = (u'_1, u'_2) \in U)$$

とおくと, Q は Ω -positive な hermitian sesqui-linear map である. このデータから Siegel 領域 D を定義する:

$$D := \{(u, w) \in U \times W ; \operatorname{Im} w - Q(u, u) \in \Omega\}.$$

この D の Cayley 変換を見てみよう. 前節より, $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ のとき, $\Delta_{\mathbf{s}}(x) = x_{11}^{s_1 - s_2} (\det x)^{s_2}$ ($x \in \Omega$) であるが, 簡単のため $\mathbf{s} = \mathbf{1} := (1, 1)$, すなわち $s_1 = s_2 = 1$ の場合を扱う. そうすると $\Delta_{-\mathbf{1}}(x) = (\det x)^{-1}$ であるから補題 12.3 より,

$$(13.1) \quad -D_v \log \Delta_{-\mathbf{1}}(x) = \operatorname{tr}(x^{-1}v) \quad (x \in \Omega, v \in V).$$

補題 13.5. $v \in V$ のとき, $D_v x^{-1} = -x^{-1}v x^{-1}$.

証明. e を 2 次の単位行列とすると, $(x + tv)^{-1} = (e + tx^{-1}v)^{-1}x^{-1}$ であるから, $\frac{d}{dt}(e + tv)^{-1}\Big|_{t=0} = -v$ を示せばよい. 直交行列 k で v を対角化して, $v = k \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} k^{-1}$ とすると,

$$\frac{d}{dt}(e + tv)^{-1}\Big|_{t=0} = k \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+t\lambda_2} \end{pmatrix} \Big|_{t=0} k^{-1} = -k \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} k^{-1} = -v$$

となって証明終わり. □

この補題と (13.1) より, $D_v D_{v'} \log \Delta_{-\mathbf{1}}(e) = \operatorname{tr}(vv')$. 従って $\langle x | y \rangle_{\mathbf{1}} = \operatorname{tr}(xy)$. よって

$$\begin{aligned} (u | u')_{\mathbf{1}} &= \langle e | Q(u, u') \rangle_{\mathbf{1}} = \operatorname{tr}(Q(u, u')) \\ &= (u | u')_{\mathbb{C}^2} \quad (\mathbb{C}^2 \text{ の標準エルミート内積}). \end{aligned}$$

従って, $w \in W$ のとき

$$(\varphi(w)u | u')_{\mathbb{C}^2} = \langle w | Q(u, u') \rangle_{\mathbf{1}} = \operatorname{tr}(wQ(u, u')).$$

ここで, $w = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$ とすると

$$wQ(u, u') = \begin{pmatrix} w_{11}u_1\bar{u}'_1 + \frac{1}{2}w_{21}(u_1\bar{u}'_2 + u_2\bar{u}'_1) & * \\ * & \frac{1}{2}w_{21}(u_1\bar{u}'_2 + u_2\bar{u}'_1) + w_{22}u_2\bar{u}'_2 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(wQ(u, u')) &= w_{11}u_1\bar{u}'_1 + w_{21}(u_1\bar{u}'_2 + u_2\bar{u}'_1) + w_{22}u_2\bar{u}'_2 \\ &= (w_{11}u_1 + w_{21}u_2)\bar{u}'_1 + 2(w_{21}u_1 + w_{22}u_1)\bar{u}'_2 \\ &= (wu | u')_{\mathbb{C}^2}. \end{aligned}$$

ゆえに $(\varphi(w)u | u')_{\mathbb{C}^2} = (wu | u')_{\mathbb{C}^2}$. これは $\varphi(w)u = wu$ を意味する.

(13.1) より, $I_1(x) = x^{-1}$ となるから, Cayley 変換の式は

$$(13.2) \quad \begin{aligned} \Phi_1(u, w) &= ((e - iw)^{-1}u, (w - ie)(w + ie)^{-1}) \\ &= (i(w + ie)^{-1}u, (w - ie)(w + ie)^{-1}). \end{aligned}$$

像 $\Phi_1(D)$ が有界であることを示そう. 補題 13.1 より, (13.2) の右辺の第 2 成分は有界である. 第 1 成分も有界であることを示せばよい. まず $w = x + iy$ とおくと, $y \in \Omega$ であり, 従って $y + e \gg 0$ であることに注意すると

$$(e - iw)^{-1} = (y + e - ix)^{-1} = (y + e)^{-1/2}(e - ix')^{-1}(y + e)^{-1/2}.$$

ただし, $x' := (y + e)^{-1/2}x(y + e)^{-1/2} \in V$. ゆえに

$$\|(e - iw)^{-1}u\|_{\mathbb{C}^2} \leq \|(y + e)^{-1/2}\| \|(e - ix')^{-1}\| \|(y + e)^{-1/2}u\|_{\mathbb{C}^2}.$$

ここでまず

$$(13.3) \quad \|(y + e)^{-1/2}u\|_{\mathbb{C}^2}^2 = ((y + e)^{-1}u | u)_{\mathbb{C}^2} = \langle (y + e)^{-1} | Q(u, u) \rangle_1.$$

$(u, x + iy) \in D$ より, $y - Q(u, u) \gg 0$. これと $(y + e)^{-1} \gg 0$ より

$$\langle (y + e)^{-1} | y - Q(u, u) \rangle_1 \geq 0.$$

よって (13.3) は, λ_1, λ_2 を y の固有値 (> 0) とするとき,

$$\begin{aligned} \|(y + e)^{-1/2}u\|_{\mathbb{C}^2}^2 &\leq \langle (y + e)^{-1} | y \rangle_1 = \langle y(y + e)^{-1} | e \rangle_1 \\ &= \text{tr}(y(y + e)^{-1}) = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} + \frac{\lambda_2}{1 + \lambda_2} \leq 2. \end{aligned}$$

次に作用素ノルム $\|(y + e)^{-1/2}\| \|(e - ix')^{-1}\|$ を評価しよう. $(y + e)^{-1/2}$ の固有値は $\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_2}}$ で共に 1 より小さいので, $\|(y + e)^{-1/2}\| \leq 1$ である. また x' の固有値を $\xi'_1, \xi'_2 \in \mathbb{R}$ とすると, $(e - ix')^{-1}$ の固有値は $\frac{1}{1 - i\xi'_1}, \frac{1}{1 - i\xi'_2}$ で, ともに固有値の絶対値は 1 より小さい. ゆえに $\|(e - ix')^{-1}\| \leq 1$. 以上より, $\Phi_1(D)$ が有界であることがわかった.