九州大学理学部　　**2009年度前期 定期試験**　　問題・解答用紙 (1)

授業科目	解析学 B2	試験日時	7月31日　13:00〜15:00	担当教員	野村隆昭

[1] Lebesgue 可測な $\mathbb{R}$ の部分集合の全体を $\mathcal{L}$，$\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を m とする．
以下の各命題が正しいかどうか，理由とともに述べよ．

(1) $E \in \mathcal{L}$ とする．$m(E) = 0$ ならば，E は高々可算集合である．
(2) $E \in \mathcal{L}$ が有界ならば，$m(E) < \infty$ である．
(3) $\mathbb{R}$ の開集合 E が $m(E) < \infty$ をみたすなら，E は有界である．
(4) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 可測関数とする．今，

$$(*) \qquad \text{定数 } M > 0 \text{ に対して，} |f(x)| \leqq M \text{ が } m\text{-a.e.}x \text{ で成り立つ}$$

と仮定する．$(*)$ の性質をもつ定数 M の下限を M_0 とすると，$|f(x)| \leqq M_0$ が m-a.e.x で成り立つ．

次頁以降にも問題がある

学生番号		氏名		評点	

授業科目	解析学 B2	試験日時	7 月 31 日　13:00〜15:00	担当教員	野村隆昭

[2] $a>0$ のとき，$F(a) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,\frac{\sin x}{x}\,dx$ とおく．問題 [3], [4] の結果を使わないで以下の問に答えよ（参考にするのは構わない）．

(1) $F(a)$ は well-defined であることを示せ．
(2) 優収束定理を用いて，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} F(a) = 0$ を示せ．
(3) $F'(a)$ を計算することにより，$F(a)$ を求めよ．

[3] $\dfrac{\sin x}{x}$ を Taylor 展開してから項別積分することにより，次式を示せ．ただし $a>1$ とする．

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,\frac{\sin x}{x}\,dx = \operatorname{Arctan}\frac{1}{a}$$

（$\operatorname{Arctan} t$ の Taylor 展開は，知らなくても，$\frac{1}{1+t^2}$ の Taylor 展開の項別積分で得られる.）

次頁にも問題がある

学生番号		氏名		評点	

授業科目	解析学 B2	試験日時	7月31日　13:00〜15:00	担当教員	野村隆昭

[**4**] $a > 0$ とする．

(1) 函数 $f(x, y) := e^{-axy} \sin x$ は $E := [0, \infty) \times [1, \infty)$ で可積分であることを示せ．

(2) Fubini の定理を用いて次の公式を導け： $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} a.$

[**5**] $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の函数で，次のように定義されているとする： $f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

$\mathbb{Q}$ は可算集合であるから，それを $\{r_1, r_2, \ldots\}$ とし，函数 $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} f(x - r_n)$ $(-\infty < x < \infty)$ を考える．

(1) $g(x)$ は $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 可積分であること，及びほとんどいたる所有限値であることを示せ．
(2) $g(x)$ 任意の開区間で有界でないことを示せ．またいたる所不連続である事も示せ．
(3) $g(x)^2$ はいたる所有限であるが，任意の開区間で Lebesgue 可積分とはならないことを示せ．

学生番号		氏名		評点	