九州大学理学部　　**2009年度前期 中間試験**　　問題・解答用紙 (1)

授業科目	解析学 B2	試験日時	6 月 19 日　13:00〜15:00	担当教員	野村隆昭

[1] X を集合とし，X の部分集合 $A_1, A_2, \dots$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\Big), \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n\Big)$$

とおく．以下の各問いに答えよ．

(1) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \{x \in X\,;$ 無数の番号 n に対して $x \in A_n$ となる$\}$ を示せ．

(2) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \{x \in X\,;$ $\boxed{}$ に対して $x \in A_n$ となる$\}$ の空欄を正しく埋めよ．

(3) X の部分集合 B に対して，χ_B は B の定義函数を表すものとする．このとき，

$$\liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) = \chi_A(x) \qquad (A := \liminf_{n\to\infty} A_n)$$

となることを示せ．

[2] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする．$E_n \in \mathcal{B}$ $(n = 1, 2, \dots)$ が $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ をみたすならば，$\mu\Big(\limsup\limits_{n\to\infty} E_n\Big) = 0$ であることを示せ．

次頁以降にも問題がある

学生番号		氏名		評点	

授業科目	解析学 B2	試験日時	6月19日　13:00〜15:00	担当教員	野村隆昭

[3] X を空でない集合とし，$\mathcal{B} := \{E \subset X \,;\, E$ または E^c は高々可算集合 $\}$ とする．

(1) $\mathcal{B}$ は σ-algebra をなすことを示せ．

(2) さらに X は非可算集合であるとする．$\mu(E) := \begin{cases} 0 & (E：高々可算) \\ 1 & (E^c：高々可算) \end{cases}$ とおくと μ は測度になることを示せ．

[4] $\mathbb{N}$ の各部分集合 E に対して，$\mu^*(E) = \begin{cases} 0 & (E = \varnothing) \\ 1 & (E \neq \varnothing, \mathbb{N}) \\ 2 & (E = \mathbb{N}) \end{cases}$ と定義する．

(1) μ^* は外測度であることを示せ．

(2) μ^* に対して Carathéodory の条件をみたす（μ^* 可測）集合は $\varnothing$ と $\mathbb{N}$ のみであることを示せ．

次頁にも問題がある

学生番号		氏名		評点	

授業科目	解析学 B2	試験日時	6月19日　13:00~15:00	担当教員	野村隆昭

[5] $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を m で表す．$f(x) := \exp\bigl(-\bigl|[x]\bigr|\bigr)$ $(x \in \mathbb{R})$ とするとき，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dm(x)$ を計算せよ．
ただし，$[x]$ はガウス記号で，x を越えない最大の整数を表す．
（函数 $f(x)$ は，ガウス記号に絶対値を付し，それに負号を付けたものが e の肩に乗っている．）

[6] 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ で考える．函数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ は可積分であるとし，

$$E_n := \{x \in X\ ;\ |f(x)| \geqq n\} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

とおく．
(1) 不等式 $\mu(E_n) \leqq \dfrac{1}{n}\displaystyle\int |f|\,d\mu$ $(n = 1, 2, \dots)$ を示せ．
(2) $E_\infty := \{x \in X\ ;\ |f(x)| = \infty\}$ は零集合であることを示せ．
(3) E_n の定義函数の極限函数 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \chi_{E_n}(x)$ を求めよ．
(4) $|\chi_{E_n} f| \leqq |f|$ と優収束定理により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,d\mu = 0$ となることを示せ．

学生番号		氏名		評点	