解 析 学 B 2 演 習

No 1. 集合代数と測度　　　　　　2009 年 5 月 1 日出題

[1.1] X, Y は集合，$f: X \to Y$ は写像とする．また $A \subset X$，$B \subset Y$ とする．
(1) $f\bigl(f^{-1}(B)\bigr) \subset B$ において（$f^{-1}(B)$ の定義から明らかであろう）f が全射ならば等号が成立するが，一般には等号でないことを例で示せ．
(2) $f^{-1}\bigl(f(A)\bigr) \supset A$ であることを示せ．f が単射ならば等号が成立するが，一般には等号でないことを例で示せ．

[1.2] 集合 X の部分集合 A, B に対して，$A\Delta B := (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ とおいて，A と B の対称差と呼ぶ．
(1) 対称差に関して，次の「結合法則」が成り立つことを示せ：

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

(2) $A\Delta B \subset (A\Delta C) \cup (C\Delta B)$ を示せ．
（ベン図に基づくのではなく，定義に従った議論をすること．）

[1.3] A_n $(n = 1, 2, \dots,)$ はある集合 X の部分集合とし，$A := \liminf_{n\to\infty} A_n$ とおく．$\liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) = \chi_A(x)$ となることを示せ．

[1.4] (1) $\mathcal{E}_3 := \{(a, b\,]\,;\, -\infty < a < b < \infty\}$ とするとき，$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma[\mathcal{E}_3]$ を示せ．
(2) $\mathcal{E}_8 := \{(-\infty, b\,]\,;\, b \in \mathbb{R}\}$ とするとき，$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma[\mathcal{E}_8]$ を示せ．
（Remark: 講義中の記号で，$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma[\mathcal{E}_1]$ はもちろん証明なしで使ってよい．）

[1.5] $\mathcal{E}_0 := \{\mathbb{R}$ の h-intervals$\}$ は elementary family をなすことを示せ．

[1.6] $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ を elementary family とする．このとき，

$$\mathcal{A} := \{\,\text{有限個の } \mathcal{E} \text{ の元の非交差和}\,\}$$

とおくと，$\mathcal{A}$ は algebra をなすことを示せ．　（講義ノートに証明があるので，本問は黒板の前で説明をするときにノートを見ることを禁止する．）

[1.7] $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{P}(X)$ を σ-algebras とする．
(1) $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ が algebra をなすならば，$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ は σ-algebra をなすことを示せ．
(2) $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ が σ-algebra をなさない例をあげよ．

[1.8] X は非可算集合であるとする．$\mathcal{B} := \{E \subset X\,;\, E$ または E^c は高々可算$\}$ とおき，$E \in \mathcal{B}$ に対して，$\mu(E) := \begin{cases} 0 & (E:\text{ 高々可算}) \\ 1 & (E^c:\text{ 高々可算}) \end{cases}$ とおくと，μ は測度になることを示せ．

[1.9] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする．$E_n \in \mathcal{B}$ $(n = 1, 2, \dots)$ が $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ をみたすならば，$\mu\Bigl(\limsup_{n\to\infty} E_n\Bigr) = 0$ であることを示せ．(Borel–Cantelli の補題)

以上

解 析 学 B 2 演 習

No 2. 外測度　　　　2009 年 5 月 18 日出題

[2.1] $\mathbb{N}$ の各部分集合 E に対して，$\mu^*(E) = \begin{cases} 0 & (E = \varnothing) \\ 1 & (E \neq \varnothing, \mathbb{N}) \\ 2 & (E = \mathbb{N}) \end{cases}$ と定義すると，μ^* は外測度であることを示せ．

[2.2] [2.1] の外測度 μ^* に対して，Carathéodory の条件をみたす（μ^* 可測）集合は $\varnothing$ と $\mathbb{N}$ のみであることを示せ．

[2.3] $\mathbb{N}$ の各部分集合 E に対して，$\mu^*(E) := \begin{cases} \dfrac{\sharp E}{1 + \sharp E} & (\sharp E < \infty) \\ 1 & (\sharp E = \infty) \end{cases}$ とおく．ただし $\sharp E$ は集合 E の元の個数を表す．

(1) $E \subset F$ ならば $\mu^*(E) \leqq \mu^*(F)$ であることを示せ．
(2) $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(E_n) = \mu^*\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\Big)$ を示せ．

[2.4] [2.3] の μ^* は外測度を定義するが，Carathéodory の条件をみたす（μ^* 可測）集合は $\varnothing$ と $\mathbb{N}$ のみであることを示せ．

[2.5] X は集合であるとし，μ^* は X 上の外測度とする．$E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ かつ $G \subset X$ が $\mu^*(E \Delta G) = 0$（$E\Delta G$ は E と G の対称差）をみたしたら，$G \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ となることを示せ．(Hint: $\mu^*(F) = 0 \implies F \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ であることを思い出すこと．)

[2.6] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続函数とする．また $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ の Borel 集合全体がなす σ-algebra とする．$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ならば $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であることを次の手順で示せ．

(1) $\mathcal{C} := \{C \subset \mathbb{R}\, ;\, f^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ は σ-algebra をなす．
(2) $\mathcal{C}$ は $\mathbb{R}$ の任意の開集合を含む．従って，(1) と $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の定義から $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ となる．

[2.7] 本問と次の問題とで，Hopf の拡張定理で premeasure が σ 有限でないときに拡張の一意性が破れる例を構成する．$X = \{0\} \cup \mathbb{N}$ とし，集合族 $\mathcal{A}$ を次で定義する：

$$\mathcal{A} := \{A \subset X\, ;\, A \text{ または } A^c \text{ は } 0 \text{ を含まない有限集合}\}.$$

(1) $\mathcal{A}$ は algebra をなすことを示せ．
(2) 各 $A \in \mathcal{A}$ に対して $\mu_0(A) := \sharp A$ とおく．このとき μ_0 は $\mathcal{A}$ 上の premeasure で σ 有限ではないこと，及び $\sigma[\mathcal{A}] = \mathcal{P}(X)$ であることを示せ．

[2.8] 記号は [2.7] の通りとする．正の数（無限大を許す）α と $E \subset X$ に対して

$$\nu_\alpha(E) := \begin{cases} \sharp E & (0 \notin E) \\ \alpha + \sharp(E \setminus \{0\}) & (0 \in E) \end{cases}$$

とおく．このとき ν_α は $\mathcal{P}(X)$ 上の測度を定義し，$\nu_\alpha\big|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ であることを示せ．また μ_0 から Hopf の拡張定理で得られる $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の測度を μ とするとき，$\mu = \nu_\infty$ であることを示せ．

以上

解 析 学 B 2 演 習

No 3. $\mathbb{R}$ 上の測度，可測函数　　2009 年 6 月 1 日出題

[3.1] Lebesgue–Stieltjes 測度 μ の外正則性を使って，次を示せ：
任意の可測集合 E（ただし $\mu(E) < \infty$）に対して，E を含む G_δ 集合（可算個の開集合の共通部分になっている集合：従って Borel 集合である）B が存在して $\mu(E) = \mu(B)$ となる．

[3.2] $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を m とし，Lebesgue 可測集合 E は $0 < m(E) < \infty$ をみたすと仮定する．$0 < \alpha < 1$ のとき，開区間 I があって，$m(I \cap E) > \alpha \cdot m(I)$ となることを示せ．(Hint: 外正則性より，開集合 $G \supset E$ をとって，$m(G) < \frac{1}{\alpha} m(E)$ とし，$G = \sum I_n$ と表せ.)

[3.3] $N \subset \mathbb{R}$ は Lebesgue 零集合とする．無理数 α を適当にとると，集合 $N+\alpha := \{x+\alpha \,;\, x \in N\}$ は有理数を含まないことを示せ．
（Hint: $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ とおくとき，結論を否定すると $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (-N + r_j)$ となることを示せ．ただし $-N := \{-x \,;\, x \in N\}$.）

- 以下 [3.4]〜[3.8] では $(X, \mathcal{B})$ を可測空間とする．

[3.4] $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ とし，$X_0 := f^{-1}(\mathbb{R})$ とおく．このとき，f が可測 であるための必要十分条件は，(1) $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{B}$，(2) $f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{B}$，(3) $f_0 := f\big|_{X_0} : X_0 \to \mathbb{R}$ が可測となることである．これを示せ．

[3.5] $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ は可測であるとする．$0 \cdot (\pm\infty) = 0$ という約束のもとで，積 fg は可測であることを示せ．

[3.6] $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ は可測であるとする．$a \in \mathbb{R}$ を固定し，

$$h(x) := \begin{cases} a & (f(x) = -g(x) = \pm\infty) \\ f(x) + g(x) & \text{（上記以外）} \end{cases}$$

と定義すると h は可測であることを示せ．
（$a \in \overline{\mathbb{R}}$ で構わないが，簡単のため，本問では $a \in \mathbb{R}$ としている.）

[3.7] f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を可測函数 $X \to \overline{\mathbb{R}}$ とする．

$$L := \{x \in X \,;\, \text{有限な} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ が存在する}\}$$

とおくと，$L = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{n,m=l}^{\infty} \left\{ x \in X \,;\, |f_n(x) - f_m(x)| < \dfrac{1}{k} \right\}$ と書けることから，$L \in \mathcal{B}$ であることを示せ．

[3.8] 前問と同じ設定で，次の集合も可測であることを示せ：

$$\{x \in X \,;\, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\}, \qquad \{x \in X \,;\, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = -\infty\}$$

以上

解 析 学 B 2 演 習

No 4.　積分　　　　　　　2009 年 6 月 8 日出題

以下測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ で考える．また函数はすべて $\mathcal{B}$ 可測とする．

[4.1]　Fatou の補題を仮定して，そこから単調収束定理を導け．

[4.2]　Fatou の補題における $\liminf$ を 2 箇所とも $\limsup$ に置き換えると，どちら向きの不等号も成立しうることを例で示せ．

[4.3]　$f \geqq 0$，かつ $\displaystyle\int f\,d\mu < \infty$ であるとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\mu(E) < \infty$ である $E \in \mathcal{B}$ が存在して，$\displaystyle\int_E f\,d\mu > \int f\,d\mu - \varepsilon$ をみたすことを示せ．

（Hint: 積分の定義に戻り，単函数の積分で $\int f\,d\mu$ を近似して E をみつける.）

[4.4]　$f \geqq 0$ のとき，$\lambda(E) := \displaystyle\int_E f\,d\mu\ (E \in \mathcal{B})$ とおくと，λ は測度であることを示せ．そして，$g \geqq 0$ に対して，$\displaystyle\int g\,d\lambda = \int gf\,d\mu$ が成り立つことを示せ．

（Hint: 後半は，まず g が単函数のときに示して，極限移行する.）

[4.5]　$f : X \to [0, \infty]$ に対して $E_n := \{x \in X\ ;\ f(x) \geqq n\}$ とおくとき，次の不等式を示せ：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leqq \int f\,d\mu \leqq \mu(X) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

また，$\mu(X) < \infty$ のとき，$\displaystyle\int f\,d\mu < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ を示せ．

[4.6]　$f_n \geqq 0\ (n = 1, 2, \dots)$ で，各点 $x \in X$ において $f_n(x) \to f(x)$ であり，さらに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu < \infty$ が成り立っているとする．このとき任意の $E \in \mathcal{B}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu$ となることを示せ．

（Hint: $\chi_E f_n$ と $\chi_{E^c} f_n$ の両方に Fatou の補題を適用してみよ.）

[4.7]　前問で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu = \infty$ のときは，結論は必ずしも成立しないことを例で示せ．

[4.8]　$f_n\ (n = 1, 2, \dots)$ は可積分函数とし可測函数 f に一様収束すると仮定する．

(1) $\mu(X) < \infty$ ならば，f は可積分であって $\displaystyle\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$ であることを示せ．

(2) $\mu(X) = \infty$ ならば，(1) の二つの結論のそれぞれが不成立である例をそれぞれ一つずつ $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度空間で示せ．

$\boxed{\text{以上}}$

解 析 学 B 2 演 習

No 5. 可積分函数　　　　2009 年 6 月 22 日出題

以下測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ で考える．

[5.1] $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ は可積分であるとする．

(1) $n = 1, 2, \ldots$ に対して $F_n := \{x \in X \;;\; \frac{1}{n} \leqq |f(x)| \leqq n\}$ とおく．このとき $\chi_{F_n} f \to f$ (a.e.) であることを示せ．

（可積分ということから，$f(x)$ はほとんど至るところ有限値であることに注意．）

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{F_n} |f| \, d\mu = \int |f| \, d\mu$ であることを示せ．

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次をみたす $A \in \mathcal{B}$ が存在することを示せ：

$$\mu(A) < \infty, \quad \sup_{x \in A} |f(x)| < \infty, \quad \int_{A^c} |f| \, d\mu < \varepsilon.$$

[5.2] f_n, g_n $(n = 1, 2, \ldots)$，そして f, g はすべて可積分函数とする．$f_n \to f$ (a.e.) かつ $g_n \to g$ (a.e.) であり，$|f_n(x)| \leqq g_n(x)$ $(\forall n = 1, 2, \ldots, \forall x \in X)$ かつ $\displaystyle\int g_n \, d\mu \to \int g \, d\mu$ ならば，$\displaystyle\int |f_n - f| \, d\mu \to 0$ であることを示せ．

（Hint: $g + g_n - |f - f_n| \geqq 0$ に Fatou の補題を適用してみよ．）

[5.3] $\mu(X) < \infty$ とし，$f : X \to \mathbb{R}$ は可積分とする．

(1) $t \in \mathbb{R}$ を固定するとき，$X \ni x \mapsto \sin(tf(x))$ は可積分であることを示せ．

(2) $\displaystyle F(t) := \int_X \sin(tf(x)) \, d\mu(x)$ $(t \in \mathbb{R})$ は積分記号下で微分できることを示せ．

[5.4] $f \geqq 0$ は可積分であるとし，$\displaystyle\int f^n \, d\mu$ は $n = 1, 2, \ldots$ に無関係であるとする．

(1) Fatou の補題を適用して，$E := \{x \in X \;;\; f(x) > 1\}$ は零集合であることを示せ．

(2) $F := \{x \in X \;;\; f(x) < 1\}$ とする．(1) から $|f(x)^n| \leqq f(x)$ (a.e. x) を得るから，優収束定理を使って，a.e. $x \in F$ に対して $f(x) = 0$ となることを示せ．

(3) f はある可測集合の定義函数とほとんど至る所一致することを示せ．

[5.5] 函数 $f(x)$ は可積分であるとする．

(1) $n = 1, 2,$ に対して，$E_n := \{x \in X \;;\; |f(x)| \geqq n\}$ とおく．このとき，任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して次の不等式が成立することを示せ：

$$\int_A |f| \, d\mu \leqq n\mu(A) + \int_{E_n} |f| \, d\mu.$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} |f| \, d\mu = 0$ であることに注意して次を示せ：任意の $\varepsilon > 0$ に対して，適当な $\delta > 0$ が存在して，$A \in \mathcal{B}$ が $\mu(A) < \delta$ をみたすかぎり $\displaystyle\int_A |f| \, d\mu < \varepsilon$ となる．

次ページにも問題がある

以下 $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を m で表す.

[5.6] $\mathbb{R}$ 上の実数値函数 $f(x)$ は Lebesgue 可積分であるとする．このとき，$F(x) := \displaystyle\int_{(-\infty,x]} f(t)\,dm(t)$ $(x \in \mathbb{R})$ は一様連続であることを示せ.

[5.7] C を Cantor 集合とする．閉区間 $[0,1]$ 上の函数 $f(x)$ を次で定義する：

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x \in C) \\ n & (x \text{ は取り除かれる長さ } \frac{1}{3^n} \text{ の開区間に属する}) \end{cases}$$

このとき，$\displaystyle\int_{[0,1]} f\,dm = 3$ であることを示せ.

[5.8] 閉区間 $[0,1]$ 上の函数 $f(x)$ を次で定義する：

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x \in \mathbb{Q}) \\ n & (x \text{ は無理数で 10 進法表示で小数点直後に連続して 0 が丁度 } n \text{ 個並ぶ}) \end{cases}$$

このとき，$\displaystyle\int_{[0,1]} f\,dm = \frac{1}{9}$ であることを示せ.

以上

解 析 学 B 2 演 習

No 6. Riemann 積分との関係 2009 年 6 月 29 日出題

[6.1] 優収束定理を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\,dx$ を求めよ．

[6.2] 優収束定理を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)}{1+x^n}\,dx$ を求めよ．

[6.3] 自然数 n を固定するとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_0^k x^n\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx = n!$ を示せ． (Hint: $0 \leqq x \leqq k$ のとき，$e^x(k-x)^k \leqq k^k$，従って $\left(1-\frac{x}{k}\right)^k \leqq e^{-x}$ をまず示せ．)

[6.4] $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\cosh(x^2)} = \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ を示せ．

(展開 $\frac{1}{\cosh(x^2)} = 2\sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-(2n+1)x^2}$ $(x \neq 0)$ の部分和を $2e^{-x^2}$ で押さえる．)

[6.5] $\alpha > 1$ のとき，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}\,dx = \Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ を項別積分により示せ．

$\left(\text{Hint : } x > 0 \text{ のとき，} \dfrac{1}{e^x-1} = \sum_{n=1}^\infty e^{-nx}.\right)$

[6.6] $\dfrac{\sin x}{x}$ を Taylor 展開して項別積分することにより，次式を示せ．ただし $a > 1$ とする．

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,dx = \operatorname{Arctan}\frac{1}{a}$$

(Arctan t の Taylor 展開は $\frac{1}{1+t^2}$ の Taylor 展開の項別積分で得られる．)

[6.7] $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$ $(t > 0)$ の両辺を t で微分していくことで，次の公式を導け：

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}\,dx = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}\,n!}$$

(積分記号下における微分のために，$a > 0$ を任意に固定し，$t > a$ で考える．)

[6.8] $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\displaystyle F(t) := \int_0^\infty \frac{1-\cos(tx)}{x^2}e^{-x}\,dx$ と置くとき，$F''(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ であることを示せ．

以上

解 析 学 B 2 演 習

No 7.　Fubini の定理　　　2009 年 7 月 13 日出題

[7.1]　$(X,\mathcal{B},\mu)$, $(Y,\mathcal{C},\nu)$ を測度空間とする．函数 $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ は $\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}$ 可測であるとする．μ-a.e.$x\in X$ に対して，函数 $f_x(y):=f(x,y)$ は ν-a.e.$y\in Y$ で 0 であるとする．このとき，ν-a.e.$y\in Y$ について，函数 $f^y(x):=f(x,y)$ は μ-a.e.$x\in X$ で 0 であることを示せ．
（この問は決して自明ではない．仮定は，零集合 $M\in\mathcal{B}$ が存在して，各 $x\notin M$ に対して零集合 $N_x\in\mathcal{C}$ があって，$y\notin N_x$ ならば $f(x,y)=0$ が成り立つということである．結論も同様に書き直してみよ．本問では $|f|$ に Fubini の定理を適用する．）

[7.2]　$(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間とする．$f\geqq 0$ を X 上の有限値可測函数とし，次の集合 G_f を考える：

$$G_f:=\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}\ ;\ 0\leqq y\leqq f(x)\}$$

(1) G_f は $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測であることを示せ．
(2) m を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度とする．$(\mu\times m)(G_f)=\displaystyle\int f\,d\mu$ であることを示せ．
（Hint: (1) $F(x,y):=f(x)-y$ は標準射影との合成等で書けるので可測である．）

[7.3]　$0<a<b$ とする．$E:=(0,1]\times[a,b]$ で函数 $f(x,y):=x^y=e^{y\log x}$ の積分を考えて，次式を示せ：

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\log x}\,dx=\log\frac{1+b}{1+a}.$$

[7.4]　$[0,1]\times[0,\infty)$ 上で函数 $f(x,y):=e^{-y}\sin(2xy)$ の積分を考えて次の式を示せ：

$$\int_0^\infty e^{-y}\,\frac{\sin^2 y}{y}\,dy=\frac{\log 5}{4}.$$

[7.5]　$a>0$ とする．函数 f は開区間 $(0,a)$ で可積分とする．
(1) $F(x,t):=\dfrac{f(t)}{t}$ は $E:=\{(x,t)\ ;\ 0<x<t<a\}$ 上可積分であることを示せ．
(2) $g(x):=\displaystyle\int_x^a\frac{f(t)}{t}\,dt$ $(0<x<a)$ とおくとき，g は $(0,a)$ 上で可積分であって，$\displaystyle\int_0^a g(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx$ となることを示せ．

[7.6]　$a>0$ とする．
(1) 函数 $f(x,y):=e^{-axy}\sin x$ は $E:=[0,\infty)\times[1,\infty)$ で可積分であることを示せ．
（E で $|f(x,y)|\leqq xe^{-axy}$ であることに注意．）
(2) Fubini の定理を用いて次の公式を導け：

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,\frac{\sin x}{x}\,dx=\operatorname{Arctan}\frac{1}{a}.$$

次ページにも問題がある

[7.7] $E := [0,\infty)\times[0,\infty)$ 上で函数 $f(x,y) := e^{-xy}\sin x$ を考える．
(1) $t>0$ とし，$E_t := [0,t]\times[0,\infty)$ 上で $f(x,y)$ は可積分であることを示せ．
(2) Fubini の定理から次式を導け：

$$\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \cos t\int_0^\infty \frac{e^{-ty}}{y^2+1}\,dy - \sin t\int_0^\infty \frac{ye^{-ty}}{y^2+1}\,dy.$$

(3) (2) で $t\to\infty$ とするとどうなるか．

[7.8] $X=Y=[0,1]$，$\mathcal{B}=\mathcal{C}=\mathcal{B}([0,1])$ とし，m を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度，ν を個数測度とする．$D := \{(x,x)\,;\ x\in X\}\in\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}=\mathcal{B}([0,1]\times[0,1])$ とする．このとき

$$\int\left[\int \chi_D\,dm\right]d\nu = 0,\quad \int\left[\int \chi_D\,d\nu\right]dm = 1,\quad \int \chi_D\,d(m\times\nu) = \infty$$

であることを示せ．
（Hint: $(\mu\times\nu)(D)=\infty$ であることは，$D\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}(B_j\times C_j)$ として考える．）

$\boxed{\text{以上}}$