数 学 概 論 I ： 定 期 試 験

 2010 年 2 月 2 日出題

学生番号　　　　　　　　　　　　　　　氏名

[**1**] 次の整級数の収束半径を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}x^n$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)x^n$

数 学 概 論 I ： 定 期 試 験

2010 年 2 月 2 日出題

学生番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

[**2**]　函数項級数 $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$ について，以下の問に答えよ．

(1) すべての $x \in \mathbb{R}$ で絶対収束することを示せ．
(2) $\mathbb{R}$ で一様収束はしていないことを示せ．

数 学 概 論 I ： 定 期 試 験

　　2010 年 2 月 2 日出題

学生番号　　　　　　　　　　氏名

[**3**]　開区間 $(0,1)$ において，函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ は一様連続ではないことを示せ．

数 学 概 論 I ： 定 期 試 験

４ 枚 目（６枚あります）　　2010 年 2 月 2 日出題

学生番号　　　　　　　　　　氏名

[**4**] (1) $n \geqq 1$ のとき，一般 2 項係数 $\binom{-\frac{1}{2}}{n}$ を計算せよ．

(2) $|y| < 1$ のときの一般 2 項展開 $(1+y)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} y^n$ を利用して，$|x| < 1$ のとき，$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, x^{2n}$ を示せ．ただし

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1), \qquad (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2n)$$

(3) (2) の整級数を項別に積分することにより，$\mathrm{Arcsin}^{(n)}(0)$ を求めよ．

数 学 概 論 I ： 定 期 試 験

5 枚 目（6枚あります）　　2010年2月2日出題

学生番号　　　　　　　　　氏名

[**5**]　上に有界な数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，以下の問に答えよ．

(1) 不等式 $\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \geqq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ を示せ．

(2) (1) の不等式において実際に不等号であるような例をあげよ．

(3) $\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在するなら，$\limsup_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ であることを示せ．

数 学 概 論 I ： 定 期 試 験

6 枚 目（6枚あります） 2010 年 2 月 2 日出題

学生番号 氏名

[**6**] $a > b > 0$ のとき，次の交代級数を考える．

$$\frac{a}{1} - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \cdots \qquad (*)$$

すなわち，第 $(2n-1)$ 項が $\dfrac{a}{2n-1}$，第 $(2n)$ 項が $-\dfrac{b}{2n}$ となる級数である．この級数の第 n 項までの和を S_n とし，$T_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{1}{k}$，$U_n := \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ とおく．

(1) $n = 1, 2, \ldots$ に対して，S_{2n}，S_{2n+1} を適当な番号 m, m' に対する T_m と $U_{m'}$ を用いて表せ．

(2) 級数 $(*)$ の一般項は 0 に近づくが，$S_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ であることを示せ．