平成20年度 数学特論8（学部） 表現論大意（大学院） レポート問題

出題：2009年1月16日　　　　（担当：野村隆昭）

[1], [2] の両方とも解いて，A4 レポート用紙にて数理事務室に提出すること．

提出期限：2009年2月6日（金）厳守

以下 $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$ とする．

[1] $\mathcal{D} \times \mathbb{R} = \{(z, \omega)\,;\ z \in \mathcal{D},\ \omega \in \mathbb{R}\}$ に次の式で積を定義したものを G とする：

$$(z,\omega)(z',\omega') := \left(\frac{ze^{-2i\omega'} + z'}{1 + z\overline{z}'e^{-2i\omega'}},\ \omega + \omega' + \frac{1}{2i}\,\mathrm{Log}\frac{1 + z\overline{z}'e^{-2i\omega'}}{1 + \overline{z}z'e^{2i\omega'}} \right).$$

ただし Log は log の主値を表すものとする．

(1) G は群をなす事を示せ．

(2) $SU(1,1) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\,;\ \begin{matrix} \alpha, \beta \in \mathbb{C} \\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \end{matrix} \right\}$ とし，

$$\pi(z,\omega) := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \big(\alpha := (1 - |z|^2)^{-1/2} e^{i\omega},\ \beta := z(1 - |z|^2)^{-1/2} e^{i\omega}\big)$$

と定義すると，π は G から $SU(1,1)$ への全射な群準同型を与えることを示せ．また π の核も求めよ．(実は G は $SU(1,1)$ の普遍被覆群になっている.)

[2] 2点 $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ の双曲距離を $d(z_1, z_2)$ で表す．講義で示したように

$$d(z_1, z_2) = 2\,\mathrm{Arc}\tanh \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2} \right|$$

である．また $d\sigma$ は $\mathcal{D}$ 上の測度で $d\sigma(z) := \dfrac{4\,dxdy}{(1 - |z|^2)^2}$ $(z = x + iy)$ となるものとする．実数 λ に対して $\mathcal{D}$ 上の函数 $f_\lambda(z) := [\cosh d(0,z)]^\lambda$ $(z \in \mathcal{D})$ を考える．

(1) $\mathcal{D}$ の双曲極座標（Cartan 座標）$z = e^{i\varphi}\tanh\frac{\tau}{2}$ $(0 \leqq \varphi < 2\pi,\ \tau \geqq 0)$ により $d\sigma(z) = \sinh\tau\, d\tau d\varphi$ となることを示せ．またこれより $f_\lambda \in L^1(\mathcal{D}, d\sigma)$ となるための λ の条件を求めよ．

(2) a_t $(t \in \mathbb{R})$, n_ξ $(\xi \in \mathbb{R})$ はそれぞれ次の一次分数変換とする：

$$a_t(z) := \frac{(\cosh\frac{t}{2})z + \sinh\frac{t}{2}}{(\sinh\frac{t}{2})z + \cosh\frac{t}{2}}, \qquad n_\xi(z) := \frac{(1 + \frac{i}{2}\xi)z - \frac{i}{2}\xi}{\frac{i}{2}\xi z + 1 - \frac{i}{2}\xi}.$$

このとき，$\cosh d(0,\, a_t \circ n_\xi(0)) = \cosh t + \frac{1}{2}e^t\xi^2$ であることを示せ．

(3) $f_\lambda \in L^1(\mathcal{D}, d\sigma)$ となる λ に対して，函数 f_λ の Harish-Chandra 変換 $\mathcal{H}f_\lambda$ を直接求めよ．ただし

$$\mathcal{H}f_\lambda(t) := e^{\frac{t}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda\big(a_t \circ n_\xi(0)\big)\, d\xi.$$

$\boxed{\text{以上}}$